A GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS E O SOFTWARE GEOGEBRA

Investigando a Generalização do Teorema de Pitágoras segundo Thabit ibn Qurra (836 d. C. – 901 d. C), com o apoio do GeoGebra

Allyson Emanuel Januário da Costa
Orientadora: Prof. Drª. Giselle Costa de Sousa
Co-orientadora: Prof. Drª. Marta Figueredo dos Anjos

Este Caderno de Atividades traz a Matemática Islâmica numa abordagem histórica, tecnológica e investigativa

SUMÁRIO

CARTA AO LEITOR (A) - **1**

INDAGAÇÕES E ORIENTAÇÕES TEÓRICAS AO PROFESSOR (A) - **2**

OBJETIVOS DO CADERNO E DAS ATIVIDADES - **4**

ESTRUTURA DO CADERNO E DAS ATIVIDADES - **4**

SUGESTÕES DE MATERIAIS COMPLEMENTARES E DICAS AO PROFESSOR (A) - **5**

ATIVIDADE 1 – CONHECENDO O DOCUMENTO, THABIT E SEU CONTEXTO

ATIVIDADE 2 – INVESTIGANDO A GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS DESENVOLVIDA POR THABIT, A PARTIR DA CARTA A UM AMIGO

ATIVIDADE 3 – REFLETINDO COM THABIT SOBRE GENERALIZAÇÃO, A PARTIR DA CARTA A UM AMIGO

EXPECTATIVAS DE RESPOSTAS - **25**

REFERÊNCIAS - **31**

Natal, 2021.
Trabalho produzido no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM) - UFRN.

CARTA AO LEITOR (A)

Natal, 15 de abril de 2021.

Querido (a) Leitor (a),

Este produto educacional, no formato de caderno de atividades, é resultado de uma pesquisa realizada no curso Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, oferecido pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM), vinculado à Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Essa pesquisa se norteia na aliança entre História da Matemática (HM), Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) e Investigação Matemática (IM) no Ensino de Matemática, notadamente no Ensino de Geometria, por meio de um curso de extensão aberto aos professores de Matemática em formação inicial e continuada, assim como pesquisadores da área de Ensino, Educação Matemática e História da Matemática e das Ciências.

Sendo assim, para o estudo do tema histórico, objeto de investigação da pesquisa: **Generalização do Teorema de Pitágoras segundo Thabit ibn Qurra, no século IX,** tomaremos como partida a análise da carta de Thabit a um amigo que estava insatisfeito com a Prova Socrática aplicada a triângulos retângulos isósceles e gostaria de uma prova mais geral. Desenvolvemos um exame histórico bibliográfico, de modo a produzir uma escrita historiográfica que serviu para compor essa proposta de caderno de atividades. Para a exploração de algumas situações históricas e matemáticas que emergiram dos textos, nos norteamos pela Investigação Matemática no que se refere às verificações de conjecturas e inferências, inclusive veiculadas com o auxílio do *software* GeoGebra, ampliando e complementando as nossas possibilidades de abordagem investigativa, até mesmo devido à dinamicidade característica desse recurso digital.

Este caderno de atividades tem como objetivo possibilitar ao usuário uma compreensão da Generalização do Teorema de Pitágoras e conteúdos relacionados, a partir de um documento (a carta), considerando contextos que emergem de sua análise e compreensão e propiciando ao usuáriot um entendimento não somente epistemológico, mas também contextual e histórico. Além disso, este caderno tem como propósito a imersão prática na aliança entre HM e TDIC, via IM e suas possibilidades didáticas.

A estrutura do caderno de atividades segue desta maneira:

- **Carta ao Leitor (a)**;
- **Indagações e Orientações Teóricas ao Professor (a);**
- **Objetivos do Caderno e das Atividades;**
- **Estrutura do Caderno e das Atividades;**
- **Sugestões de Materiais Complementares e dicas ao Professor (a);**
- **Expectativas de respostas;**
- **As atividades;**
- **Referências.**

A presente **Carta ao Leitor (a)** tem como propósito abordar uma visão geral do produto educacional, a origem dele, finalidades e objetivos gerais. **Nas Indagações e Orientações Teóricas ao Professor (a)**, há uma apreciação , tomando como base os fundamentos desse produto, fruto de pesquisa de mestrado, de modo a apresentar ao Professor (a), em que está alicerçada a construção desse caderno, inclusive para ajudar na aplicação, análise e avaliação desta proposta. Dentro desses aspectos importantes para aplicação, seguem: os **Objetivos do Caderno e das Atividades** – especificando o que se almeja com a aplicação deste caderno e das respectivas atividades; a **Estrutura do Caderno e das Atividades** – denotamos a composição do caderno e das atividades; as **Sugestões de Materiais Complementares e dicas ao Professor (a)** – sugestões de materiais, vídeos, *links* de exploração ou complementação para o (a) professor (a), além de dicas ao professor (a) na aplicação das atividades; e as **Expectativas de respostas** – possíveis resultados investigativos. Em seguida, tem-se as **Atividades**; e as **Referências** que usamos na construção deste produto.

Esperamos que faça um excelente uso das atividades propostas em sala de aula! Atenciosamente,

Allyson Emanuel Januário da Costa
Giselle Costa de Sousa
Marta Figueredo dos Anjos

INDAGAÇÕES E ORIENTAÇÕES TEÓRICAS AO PROFESSOR (A)

A fim de introduzir as bases dessa proposta, apresentamos em que está alicerçada a construção desse caderno por meio de algumas perguntas e respostas norteadoras importantes tanto na fundamentação e quanto à aplicação do presente material. Vale ressaltar que são reflexões pontuais e iniciais que podem ser aprofundadas com demais referências do produto, incluindo a dissertação. Considerando que o presente produto se ancora na aliança entre HM, TDIC via IM procurando aproximação com abordagem historiográfica atualizada via investigação-históricas-com-tecnologia do material produzido por Thabit no contexto da matemática islâmica medieval, podemos nos perguntar:

a) Porque abordar HM, considerando contextos que emergiram do documento analisado?

Segundo Miguel e Miorim (2019), a história apresentada de forma direta não é eficaz, pois para cada lugar a história será vista diferente, já que está ligada à cultura e sociedade específicas, destacando que o aluno pode aprender de forma indireta, ou seja, trazendo as relações históricas, sociais, políticas, culturais de cada povo. A HM vista sob o olhar do educador matemático permite identificar essa possibilidade pedagógica da história, pois esta está inserida numa prática social escolar, com diferentes culturas matemáticas a serem consideradas, visando o ensino e aprendizagem da Matemática.

b) De que maneira a HM pode se apresentar como um recurso pedagógico?

Destaca-se que ao longo dos tempos e em diferentes sociedades, o conhecimento matemático ganha uma reorganização das informações, assim como uma ressignificação do que essa Matemática representou no passado e o que representa no presente – com um real destaque para a significação dos alunos neste citado presente, contribuindo para uma ruptura na tradicional prática educativa, porque pode apresentar atividades que propiciem um desenvolvimento cognitivo criativo, já que a história é pensada como um princípio de unificação de três aspectos que permeiam a HM em sala de aula: aspecto cotidiano, escolar e aspecto científico da Matemática, Mendes (2009).

c) Ao propor uma aproximação da Historiografia Atualizada, em que ela está pautada?

A Historiografia Atualizada, por sua vez, apresenta uma HM com suas rupturas e seus contextos sociais inseridos, destacando que para que se tenha a Matemática que temos existiu um processo, não somente com vitórias e acertos, mas também com erros, inclusive contribuindo fortemente na desconstrução de mitos e lendas que se têm hoje em dia. Saito (2016) discorre que a vertente atualizada se torna fundamental quando se pensa na proposta de articulação entre a história e o ensino de Matemática, porque nos permite compreender o movimento que o conhecimento matemático faz, e reconhecer esse movimento nos propicia uma melhor fundamentação para nossa prática pedagógica.

d) O que é preciso saber de HM para aplicar este caderno de atividades?

É necessário que o (a) professor (a) tenha conhecimento sobre a Civilização Islâmica, sobretudo no período da Idade Média, além de se apropriar do conteúdo sobre o Teorema de Pitágoras e notadamente sobre a Generalização do Teorema de Pitágoras. É fundamental que o (a) docente conheça alguns traços biográficos de Thabit ibn Qurra e suas produções, assim como a presença do Helenismo e sua influência sobre as produções científicas de estudiosos islâmicos medievais.

e) O que é a Investigação Matemática?

Partindo da ideia de que investigar é uma característica própria de um pesquisador, a IM almeja convidar ao aluno a ser participante ativo no seu processo de aprendizagem matemática, a partir de um problema, tendo a oportunidade de conjecturar hipóteses, testá-las, avaliá-las e reformulá-las de acordo com o processo de investigação. Neste sentido, na IM o aluno partirá de um problema, mas nem sempre solucionará, inclusive podendo surgir outros

problemas que norteiem a sua investigação, o problema, em si, se torna mais interessante que a resolução dele, pois a partir dele pode se chegar a outros problemas, bem como a outras teorias.

f) Quais são as fases na realização da IM em sala de aula?

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), podem-se identificar **três fases na realização de uma investigação matemática em sala de aula**: introdução da tarefa; realização da investigação e discussão dos resultados. Na primeira fase da investigação matemática – introdução da tarefa – o professor irá propor a atividade, seja de forma escrita, ou oral; na segunda fase – realização da investigação – pode ser realizada individualmente ou em grupo, e com a turma toda, momento de investigação propriamente dita; e por fim a última fase – discussão dos resultados – em que os alunos irão relatar aos demais colega de turma o que eles conseguiram fazer, como conseguiram.

g) Como professor (a), qual minha função ao utilizar a IM nas minhas aulas?

O professor deve, incialmente e durante todo o processo de investigação, pensar e propor tarefas que venham desafiar o aluno, que esses possam se sentir motivados a pensar, analisar e refletir as mais diferentes formas de interpretações e resolução dessa problemática proposta. É papel do professor também a avaliação do progresso dos alunos, cuja função está em analisar cada etapa de forma detalhada, acompanhar o desenrolar dos alunos/grupos, orientando para as devidas reflexões, estendendo ou adiantando o tempo das atividades, de acordo com os resultados alcançados, enfim, o professor precisa obter informações de como o trabalho está se dando, desde o início até o final das discussões da investigação.

h) Quais as potencialidades[1] das TDIC presentes neste caderno?

Segundo Borba e Penteado (2019):

· **Não nos interessa o produto, mas sim o processo de aprendizagem** – utilizando as TDIC como uma função exploradora e investigativa;

· **As TDIC não vieram para substituir o homem, mas desenvolver pensamentos** – raciocinar, formulação e resolução de problemas, identificação de como se usará um determinado dado para transformá-lo em conhecimento.

· **Otimização do tempo** – principalmente em uma atividade investigativa, a possibilidade de construções pode otimizar o tempo na investigação dos problemas. Neste caderno visualizamos a otimização nas construções feitas no *software* ao invés de desenhos, que não propiciam a dinamicidade na investigação.

· **Autonomia dos estudantes** – com a utilização das TDIC o aluno pode, ao seu tempo, desenvolver-se no processo de aprendizagem matemática, inclusive sendo mais ativo neste processo.

i) O que é a investigação-histórica-com-tecnologia?

Em nosso caso consideramos que as TDIC podem apoiar a HM via IM formando um coletivo pensante como destacam Borba e Penteado (2019), concretizado em tarefas de investigação-histórica-com-tecnologia, que Silva (2019, p. 107) destaca que "entrelaçamos a HM, as TDIC e a IM de tal modo que se tornem tendências potenciais, comandadas pela História da Matemática num processo uno de aliança, a qual chamaremos como investigação-histórica-com-tecnologia.".

j) A quais níveis educacionais, pode-se aplicar este caderno?

Este caderno está direcionado a um curso de extensão e aos seguintes públicos: professores em formação inicial e continuada, pesquisadores das áreas de Ensino, Educação Matemática e História da Matemática e das Ciências. Entretanto, para ser aplicado à Educação Básica, sugerimos significativas adequações e adaptações, ou recortes de algumas investigações, respeitando-se o limite de instrução. As atividades podem ser aplicadas de forma remota, como aqui sugeridas, ou de forma presencial. Podem ser aplicadas individualmente ou em grupos, a depender dos objetivos do professor neste sentido.

[1] Estamos cientes de que essa tendência, assim com as outras duas, também tem limitações, mas ressaltamos aqui o potencial que pode ser explorado no caderno.

k) Quais conteúdos[2] são abordados neste caderno?

Os conteúdos abordados nestas atividades são: propriedades dos triângulos, classificação de triângulos quanto ao comprimento dos lados e à amplitude dos ângulos, Lei dos Cossenos, áreas de polígonos, Teorema de Pitágoras, generalização matemática e Generalização do Teorema de Pitágoras, voltados à Educação Básica. Além dos conteúdos: História da Matemática e das Ciências, Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, e Investigação Matemática, como tendências da Educação Matemática.

l) De acordo com a pesquisa desenvolvida, em suma, quais são os argumentos reforçadores da aliança?

O estudo dos métodos; a desmistificação da Matemática; a educação integral e essencialmente formadora de cidadão; o resgate das informações históricas; a oportunidade do aluno a desenvolver-se no processo de investigação; a autonomia intelectual; a ressignificação da Matemática; o aspecto científico da Matemática e a construção do conhecimento matemático; a solução de problemas e os quatro momentos na realização de uma investigação Matemática. . A aliança, em suma, permite que o usuário deste caderno contextualize a problemática histórica com auxílio das tecnologias digitais, e a partir da IM propor observações e resoluções.

OBJETIVOS DO CADERNO E DAS ATIVIDADES

· Compreender alguns elementos do contexto da Civilização Islâmica Medieval que emergiu a partir da análise de um documento (uma carta) e do desenvolvimento científico da época.
· Identificar elementos matemáticos a partir do que foi enunciado de forma retórica na carta.
· Compreender aspectos da influência do Helenismo na produção do conhecimento na Civilização Islâmica Medieval.
· Identificar indícios da presença de Thabit ibn Qurra e suas produções nessa relação com o conhecimento grego.
· Apropriar-se do Teorema de Pitágoras e suas demonstrações para os triângulos retângulos.
· Refletir sobre o papel da generalização na matemática, bem como associar às discussões feitas por Thabit no século IX, compreendendo e explorando essa produção de Thabit com o auxílio das tecnologias digitais.
· Visualizar de forma prática a aliança entre as tendências da Educação Matemática – HM, TDIC e IM – no Ensino de Matemática, identificando e reconhecendo as potencialidades dessas três tendências na investigação de um problema histórico sobre Geometria, mais precisamente sobre a Generalização do Teorema de Pitágoras.

ESTRUTURA DO CADERNO E DAS ATIVIDADES

Este Caderno de Atividades possui três atividades, a saber:

- **ATIVIDADE 1** – CONHECENDO O DOCUMENTO, THABIT E SEU CONTEXTO
- **ATIVIDADE 2** – INVESTIGANDO A GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS DESENVOLVIDA POR THABIT, A PARTIR DA CARTA A UM AMIGO
- **ATIVIDADE 3** – REFLETINDO COM THABIT SOBRE GENERALIZAÇÃO A PARTIR DA CARTA A UM AMIGO

A estrutura de cada atividade não possui um padrão de repetição. Apenas três seções são comuns nas três atividades: **Introduzindo a Tarefa** – nessa seção faremos uma introdução aos conteúdos que serão investigados nas atividades, além de retomar o que foi desenvolvido na atividade anterior (para as Atividades 2 e 3); **Construindo Conjecturas** – nesta seção, de acordo com o processo de Investigação Matemática, é o momento de se construir conjecturas, para ao longo da atividade serem verificadas e validadas, ou não; e **Avaliando e Socializando** – para esta seção é destinado o momento de avaliar as conjecturas verificadas e a investigação realizada até o momento, juntamente com a socialização, fazendo parte também da Investigação Matemática proposta pelas atividades.

[2] Na Base Nacional Comum Curricular, na área de Matemática, mais especificamente o 9º ano, tem como **Objetos de Conhecimento** "Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração. Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais." (BRASIL, 2018, p. 318). E como **Habilidades**: "(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes." (BRASIL, 2018, p. 319)

Nessa direção, as demais seções encontradas nas atividades respeitam esse movimento que a investigação propicia, de idas e vindas ao texto analisado (trecho da carta de Thabit ibn Qurra direcionada a um amigo). Entretanto, a partir desse movimento feito na análise do documento, também propomos reflexões nessas etapas, inclusive com novas conjecturas, de novos problemas que forem aparecendo, à medida que imergimos no texto sobre a **Generalização do Teorema de Pitágoras** desenvolvida por Thabit e nos contextos que surgem do trecho da carta analisada.

💡SUGESTÕES DE MATERIAIS COMPLEMENTARES E DICAS AO PROFESSOR (A)💡

Para o desenvolvimento da proposta aqui trazida, apresentamos a seguir alguns materiais, *links*, sites, referências que poderão complementar o entendimento do professor acerca do tema, auxiliando na aplicação das atividades, além de propiciar uma maior relação do professor com a matemática islâmica medieval, possibilidades e exemplos de uso de tecnologias digitais em sala de aula. Consideramos essa relação fundamental para um melhor aproveitamento da aplicação deste caderno.

· Minicurso de GeoGebra, desenvolvido pelo Programa de Educação Tutorial (PET) da Universidade Federal de Santa Maria. Acesse: *Apostila_GeoGebra.pdf (ufsm.br)*

· Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro. Acesse: *Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro (im-uff.mat.br)*

· Site MENTIMETER. Acesse: *Mentimeter*

· Tutorial de como usar o Mentimeter em atividades – Nuvem de Palavra. Acesse: TUTORIAL: O USO DO MENTIMETER COMO FERRAMENTA INTERATIVA PARA AULAS REMOTAS - NUVEM DE PALAVRAS

· Tutorial de como usar e de gerar link do *Jamboard* para atividades – quadro colaborativo. Acesse: *Google Jamboard* - TUTORIAL COMPLETO | *Lousa digital interativa*

· Nas atividades que utilizamos o *Jamboard*, usei a opção de incluir formas e a opção de texto para o título de cada quadro de anotação.

· Para criar um Padlet, visualizar as possibilidades de uso em sala de aula, assim como o acesso a um Padlet para colaboração, veja esse tutorial: TUTORIAL DE PADLET PARA PROFESSORES E ALUNOS

· 7 aplicativos para criação de Mapa Mental. Acesse: *7 Aplicativos para Criação de Mapa Mental - MapaMental.org*

· Para acesso a slides e alguns *links* usados na aplicação dessas atividades, roteiros de atividades, pode-se obter a partir do acesso à pasta presente no *Google Drive*, intitulado: **MATERIAL PARA O PRODUTO EDUCACIONAL – ALLYSON**, também pelo *link*: https://drive.google.com/drive/folders/1uDNaPyEcCLkOcTtLX9wK7MBtjK6aYTZy?usp=sharing

· Mais elementos biográficos de Thabit ibn Qurra. Acesse: *SÂBİT b. KURRE - TDV İslâm Ansiklopedisi (islamansiklopedisi.org.tr)*

· ISMI – Iniciativa de Manuscritos Científicos Islâmicos. Acesse: *ISMI | ISMI (mpg.de)*

· Sobre a Matemática Islâmica Medieval, veja:

- MUNIZ, Jéssica Targino. **Soluções de equações quadráticas por ʻAbd Al-Hamid ibn Turk na Formação Inicial do Professor de Matemática**: uma perspectiva orientada pela História da Matemática. 2020. 277f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020.

- ARAÚJO, Marlene Gorete de. **Abu ja'far muhammad ibn musa al-khwarizmi: contribuições da álgebra para o ensino.** 2019. 143f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

· Sobre Thabit ibn Qurra e Generalização do Teorema de Pitágoras, segundo ele, veja:

- COSTA, Allyson Emanuel Januário da. **Thabit Ibn Qurra (836-901) e a Generalização do Teorema de Pitágoras: Aliando História, Tecnologia e Investigação no Ensino de Matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2021.

· Sobre os *Sabians* e a relação dos deuses gregos no Islamismo:

– WALBRIDGE, John. Explaining away the Greek gods in Islam. **Journal of the History of Ideas**, v. 59, n. 3, p. 389-403, 1998.

· Na aplicação das atividades, de forma remota, caso o professor deseje fazer em grupos, de forma colaborativa a construção no GeoGebra, tem a possibilidade de se utilizar o *GeoGebra Classroom*.

– Vídeo de tutorial sobre o *GeoGebra Classroom*:
Como postar atividade do Geogebra diretamente no Google Classroom? - YouTube E
Oficina - Google Classroom e GeoGebra Classroom: uma interseção interessante para aulas remotas - YouTube

– *Link* de acesso ao *GeoGebra Classroom*:
GeoGebra Classroom – Live Conversations with Interactive Math Tools

· Caso o (a) professor (a) deseje aplicar de forma presencial, pode sugerir nos momentos de Socialização das atividades discussões em pequenos grupos e depois uma socialização com toda turma. Pode também sugerir, por exemplo, o momento de construção no GeoGebra ser em duplas e trios, mas com as investigações sobre as construções sendo individuais e a Socialização também pode ser em grupo. Ainda pode-se sugerir nos momentos de Introdução à Tarefa usar o MENTIMETER, usando o recurso de Nuvem de Palavra e assim iniciar as discussões.

ATIVIDADE 1 – CONHECENDO O DOCUMENTO, THABIT E SEU CONTEXTO

INFORMAÇÕES GERAIS

Pré-requisitos:
- Conhecer o Teorema de Pitágoras.

Recursos necessários: computador e/ou celular com acesso à internet, software de leitor/editor de texto; software GeoGebra instalado; microfone e câmera.

Formato da aplicação: Remoto
Aplicada individualmente ou em grupo.

Objetivos:
- Introduzir a tarefa de investigação-histórica-com-tecnologia;
- Apresentar uma fonte de investigação histórica;
- Compreender, a partir de uma apreciação preliminar do documento, alguns elementos do contexto da Civilização Islâmica Medieval;
- Compreender aspectos da influência do Helenismo na produção do conhecimento na Civilização Islâmica Medieval;
- Identificar indícios da presença de Thabit ibn Qurra e sua produção na relação com o conhecimento grego;

Assuntos/temas/conteúdos: Expansão islâmica na Idade Média; Influência do Helenismo; História da Matemática Islâmica Medieval e Generalização do Teorema de Pitágoras.

INTRODUZINDO A TAREFA

Escreva nos comentários do chat, que estamos usando para o curso, a primeira coisa que vem a sua mente sobre as seguintes palavras (observe e obedeça a ordem. Ok?)

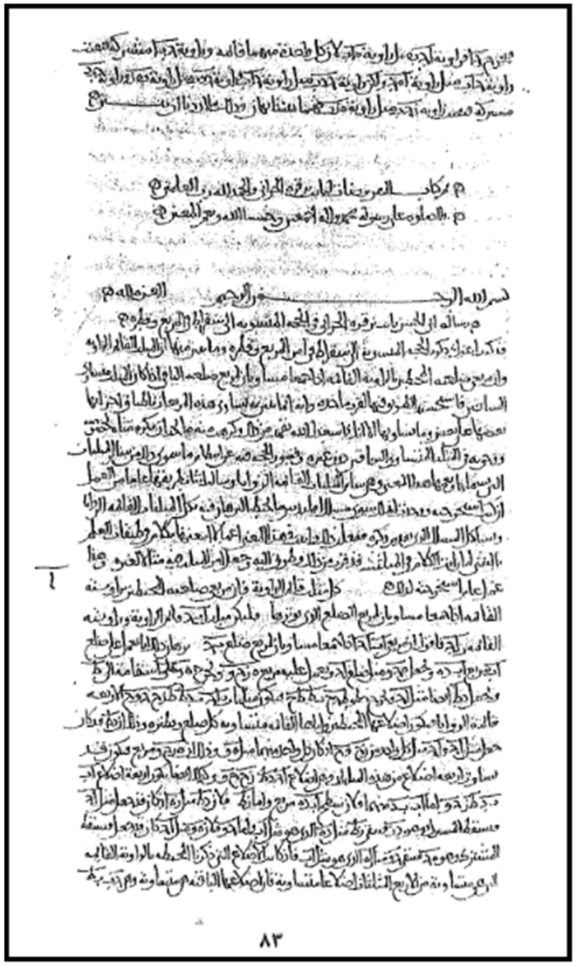
1. Fonte histórica
2. Carta
3. Carta – fonte histórica
4. História da Matemática Islâmica Medieval
5. Matemática Islâmica Medieval

Convido você a estudar um documento que revela um pouco da produção do estudioso Thabit ibn Qurra no contexto da matemática islâmica medieval.

APRESENTANDO O DOCUMENTO

Para essa atividade, partiremos do documento que será o objeto de investigação dessa e das demais atividades. Trata-se de um tratado intitulado: Risāla fi 'l-Hujja al-Mansūba ilā Suqrāt fi al-Murabba' wa-Qutrihi (*On the Proof Attributed to Socrates on the Square and its Diagonal*)[3] – que traduzimos como **Tratado da Prova atribuída a Sócrates sobre o Quadrado e suas Diagonais**.

Figura 01 – Primeira página do Tratado, escrito por Thabit, relativo a Prova atribuída a Sócrates sobre o Quadrado e suas Diagonais



Fonte: Segzin[4] (2010)

[3] Veja: https://muslimheritage.com/thabit-ibn-qurra/ para visualização do título do tratado e de outros, a partir de um artigo eletrônico biográfico de Thabit.

[4] Documento digitalizado do original de Thabit e disponível no codex AyaSofya, editado por Segzin (2010).

Este tratado está presente numa carta, escrita por Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani para um amigo no período medieval, cuja versão original encontra-se no Códex (que reúne vários manuscritos não somente de Thabit, mas também de outros estudiosos islâmicos medievais) registrado sob o número 4832, preservado na Biblioteca Museu de AyaSofya[5], em Istambul na Turquia.

CONSTRUINDO CONJECTURAS

1. Falamos aqui que nosso documento é um tratado apresentado por meio de uma carta. Você sabe o que é um tratado?

2. A carta é um gênero textual, com estrutura específica e que normalmente tem um remetente e destinatário. Nesse caso, pelo que foi apresentado inicialmente do documento, quem seriam os remetente e destinatário? Você conhece esses personagens? Levante hipóteses de quem seria e qual sua possível relação? Se necessário, faça pesquisa para tentar configurar suas conjecturas iniciais e aponte seus primeiros resultados.

3. Vejamos o título do tratado, e diante dele, você considera que o documento trata de que assunto? Sabe algo sobre ele? Indique e/ou justifique. Por exemplo, além do remetente e destinatário da carta, há mais personagens no documento, quem? Há relação com os dois primeiros identificados?

4. Você viu que a carta original está em árabe e já identificou os personagens presentes nela, diante dessas informações, investigue se há relação do idioma com os personagens presentes no documento e externe qual seria?

5. Registre suas hipóteses e vamos estudar um pouco mais, buscando evidências no nosso documento que as validem ou não.

[5] Não foi encontrado o site oficial do Museu, mas veja mais em: *https://kvmgm.ktb.gov.tr/TR-44094/istanbul-ayasofya-muze-mudurlugu.html*

VOLTANDO AO DOCUMENTO

Considerando que o idioma do tratado original está em árabe, para nossa investigação sobre seu conteúdo, usaremos a tradução turca de Ayidin Sayili (1958). Nessa versão, o tratado é nomeado por: *KARE İLE KÖŞEGENİ HAKKINDAKİ (TEOREMİN) SOKRATES TARAFINDAN VERİLEN İSPATI ÜZERİNE EBÜ'L HASAN SABİT İBN KURRA'NIN RİSALESİ*, em seguida, traduzimos para o português, de modo que o tratado passa a se chamar: **O TRATADO DE ABU'L HASAN THABIT IBN QURRA EM RELAÇÃO À PROVA ATRIBUÍDA A SÓCRATES SOBRE O QUADRADO E SUA DIAGONAL**

Figura 02 – Traduções turca e portuguesa da primeira página do trabalho de Thabit a respeito do Tratado da Prova atribuída a Sócrates sobre o Quadrado e suas Diagonais

KARE İLE KÖŞEGENİ HAKKINDAKİ (TEOREMİN) SOKRATES TARAFINDAN VERİLEN İSPATI ÜZERİNE EBÜ'L HASAN SÂBİT İBN KURRA'NIN RİSALESİ

(Türkçe Tercüme)

Allah seni aziz kılsın; kare ve köşegeni ile ilgili Sokrates ispatını ve bu ispatta sarih olarak meydana çıkan hususları, yani üçgenin dik olduğunu ve ikizkenar olması halinde dik açıyı meydana getiren iki kenarının kareleri toplamının diğer kenar karesine eşit olduğunu söz konusu ediyor, bundaki metodu kolayca anlaşılabilmesi bakımından övüyorsun. Gerçekten, bu metodla, buradaki dörtgenlerin eşitliği, bunların birbirlerine eşit kısımlarının bazılarının birbirleriyle intibak ettirilmesi suretiyle meydana çıkıyor. Ancak, Allah seni mesut etsin, özel bir hali temsil edip sadece ikizkenar üçgen için zaruri olarak doğru olması ve bu teoremin şümulu içine girmesi gereken ikizkenardan gayrı dik üçgenleri ihtiva etmemesi bakımından hakikaten beğenilmemesi gereken mahiyetinden dolayı bu ispatı kusurlu bulduğunu, bu ispatın seni tatmin etmediğini söyliyorsun, ve bunun genel ispatını yapmışsam bunu sana bildirmemi istiyorsun.

Ben, Öklid ispat tarzından farklı olmak üzere ve zikri geçen Sokrates metoduna benzer bir yoldan, bütün dik üçgenlere şâmil bir ispat şekli tesbit etmiş bulunuyorum. Burada bu ispat tarzını takdim ediyor, ve ayrıca, bu görüş açısından mesele ile ilgili muhtelif teoremler sunuyorum. Bunların peşinden de, muayyen bir konudaki bilgimizin dereceleri üzerinde birkaç söz ilâve etmiş bulunuyorum. Çünkü üçgen hakkında söylediklerim sözü bu konuya getirdi ve beni bu yola sevk etti. Elimizdeki üçgen meselesi de daha geniş olan bu konuya bir misal teşkil etmiş oldu.

Sâbit ibn Kurra burada Sokrates usuluna uygun iki ispat tarzı veriyor. Bunlar burada asıl metindekine nazaran kısaltılmış olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Birinci ispat: Asıl üçgen ABC'dir. FC ve BB′ doğru parçaları AB'ye eşit olarak çiziliyor. AA′B′B ve DD′B′F kareleri AB ile BC doğru parçalarının karelerine, ACDE ise AC nin karesine eşittir. Resimdeki 1,2,3, ve 4 numaralı üçgenler, kolayca

O TRATADO DE ABU'L HASAN THABIT IBN QURRA EM RELAÇÃO À PROVA ATRIBUÍDA A SÓCRATES SOBRE O QUADRADO E SUA DIAGONAL

(Tradução Turca)

Que Allah o torne santo; A prova de Sócrates sobre o quadrado e a diagonal e os pontos que ocorrem obviamente nesta prova, ou seja, o triângulo é perpendicular e se for um isóscele, a soma dos quadrados dos dois lados que formam o ângulo reto é igual ao quadrado do outro lado, você elogia o método aqui para fácil compreensão. De fato, com este método, a igualdade dos quadriláteros aqui surge combinando algumas de suas partes iguais entre si. No entanto, que Allah lhe agrade, você diz que acha esta prova falha por causa de sua natureza, que não deveria ser admirada, uma vez que representa um estado especial e só é essencialmente verdadeira para um triângulo isósceles e não contém triângulos retângulos além de isósceles que deveriam ser incluídos neste teorema, e esta prova não o satisfaz, e você quer que eu informe se eu fiz uma prova geral disso.

Encontrei uma forma de prova que inclui todos os triângulos retângulos, diferente da forma euclidiana de prova e de uma forma semelhante ao método de Sócrates mencionado. Apresento aqui esse modo de prova e, também, desse ponto de vista, apresento vários teoremas sobre o assunto. Em seguida, acrescentei algumas palavras sobre o grau de nosso conhecimento sobre um determinado assunto. Porque o que eu disse sobre o triângulo trouxe a palavra até esse ponto e me levou a esse caminho. A questão do triângulo que temos também deu um exemplo para essa questão maior.

Thabit ibn Qurra aqui dá dois estilos de prova de acordo com o método de Sócrates. Elas podem ser expressas aqui de forma abreviada em comparação com o texto original.

Primeira prova: o triângulo original é ABC. Os segmentos de linha FC e BB' são desenhados igualmente para AB. Os quadrados AA'B'B e DD'B'F são iguais aos quadrados dos segmentos de reta AB e BC, e ACDE ao quadrado de AC. Os triângulos 1, 2, 3 e 4 na imagem podem facilmente

Fonte: Sayili (1958)

VAMOS REFLETIR

1. Note que há referência a Allah ou/e por meio de uma saudação. Para você qual é o motivo dessa referência e dedicatória a Allah feita por Thabit? Há alguma relação disso com a expansão islâmica da época? Identifique na carta onde está essa informação e transcreva trechos da carta que apresentam a relação de Thabit com a expansão islâmica da época.

2. Agora, investigue um pouco mais e busque relação ou não entre as informações dos itens 4 (Construindo Conjecturas) e 1 (item anterior), e os termos: islamismo e mulçumano. A saudação do item anterior tem alguma relação? Justifique.

3. Outra informação relevante do documento, já que é uma carta, é o período, contudo, nesse caso a carta não está datada, mas, confrontando com a época em que os personagens mencionados nela viveram, podemos situá-la no tempo. Nesse contexto, teça comentários sobre o período medieval e a matemática islâmica medieval.

4. Vamos sistematizar as primeiras conclusões, frente as hipóteses levantadas e testadas? Para tanto, usaremos o *site* MENTIMETER, com o recurso *Word Cloud* (Nuvem de Palavra). Sigamos os passos:

1° Passo: Acessar o link: *https://www.menti.com/*

2° Passo: Colocar o código disponibilizado via chat no espaço Please enter the code (Por favor, entre com o código).

3° Passo: Responder com uma palavra em cada espaço (total de 5 espaços) o seguinte questionamento:
Em 5 palavras, quais são suas conclusões sistematizadas até o momento?
A partir dessas palavras, começaremos nossa socialização.

INVESTIGANDO UM POUCO MAIS: DE VOLTA AO DOCUMENTO

Vimos que o documento em estudo nos leva ao contexto da matemática islâmica medieval. Nesse cenário, é importante destacar o viés político, principalmente no Califado Abássida (751 – 1258), que se teve grandes transformações sociais, culturais e científicas, por exemplo, com a capital do império islâmico mudando-se para Bagdá e a construção da Casa da Sabedoria, instituto responsável por abrigar cientistas e tradutores, restauradores, a fim de impulsionar a ciência que se tinha até o momento, seja com produções cientificas inéditas, como também com traduções de livros gregos, disponibilizando-os no idioma árabe (BERGGREN, 1986). É dentro desse contexto, sob o governo do califa al-Mutassim (796 – 842 d. C.), que surge, no século IX, Thabit ibn Qurra (ver a caricatura dele na Figura 03). Thabit ibn Qurra nasceu em Harran, antiga e importante cidade da Mesopotâmia e que atualmente está localizada no sul da Turquia com fronteira com a Síria (ver Figura 03), no ano de 836 d. C. e faleceu em 901 d. C

Figura 03 - Thabit ibn Qurra (836-901) e a localização atual de Harran (Turquia)

Fonte: O'Connor e Robertson (2015)

VAMOS REFLETIR NOVAMENTE

1. Há algumas palavras-chave como Mesopotâmia, califa, califado, expansão do império islâmico, Casa da Sabedoria, entre outras associadas ao entorno do documento. Esses pontos nos dão pistas para pensar nos motivos que Thabit teria tratado do assunto de sua carta? Teça comentários a respeito de possíveis relações destes pontos e os motivos para o assunto tratado na carta por Thabit.

2. Todos os estudiosos da mesma época de Thabit eram da religião muçulmana, então? Qual era a relação teológica de Thabit?

3. Árabe, muçulmano e islâmico são sinônimos? Ou há diferença? Dentro dessas definições, em qual está situado Thabit?

4. Thabit fazia parte de uma seita, conhecidos como adoradores de estrelas. Eles tinham como base teológica a fé helenística. O que se entende por Helenismo?

5. Qual contribuição a relação teológica de Thabit teve para sua produção científica?

6. Falamos que o título do tratado pode ser traduzido para português como **O TRATADO DE ABU'L HASAN THABIT IBN QURRA EM RELAÇÃO À PROVA ATRIBUÍDA A SÓCRATES SOBRE O QUADRADO E SUA DIAGONAL**, mas ele também é conhecido como **Generalização do Teorema de Pitágoras**, na literatura secundária (SAYILI, 1960). Observe um trecho do manuscrito:

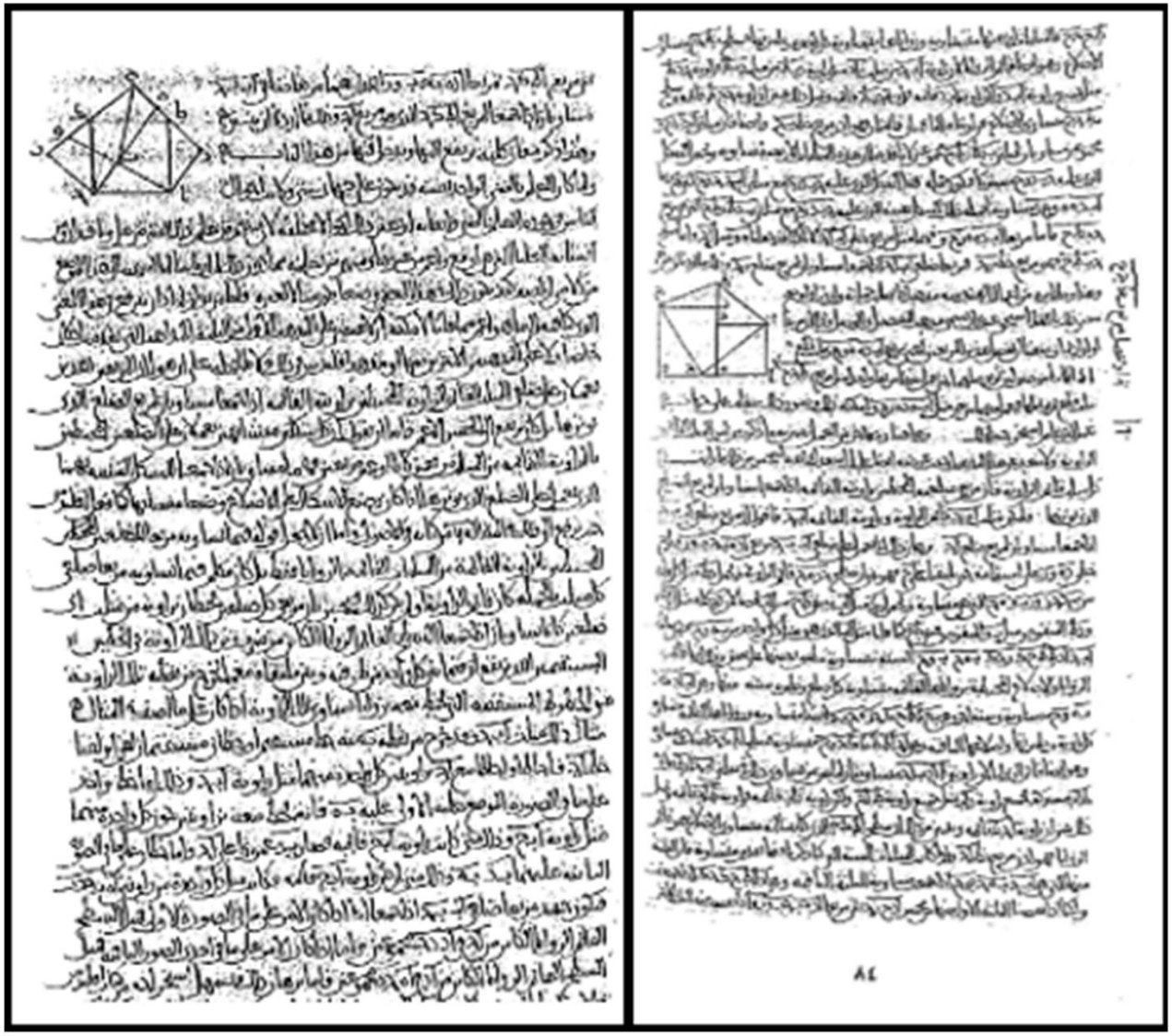


Figura 04 – Parte do manuscrito registrado sob o número 4832, no Codex de AyaSofya, sobre o Tratado da Prova atribuída a Sócrates sobre o Quadrado e suas Diagonais, feito por Thabit ibn Qurra

Fonte: Sezgin (2010)

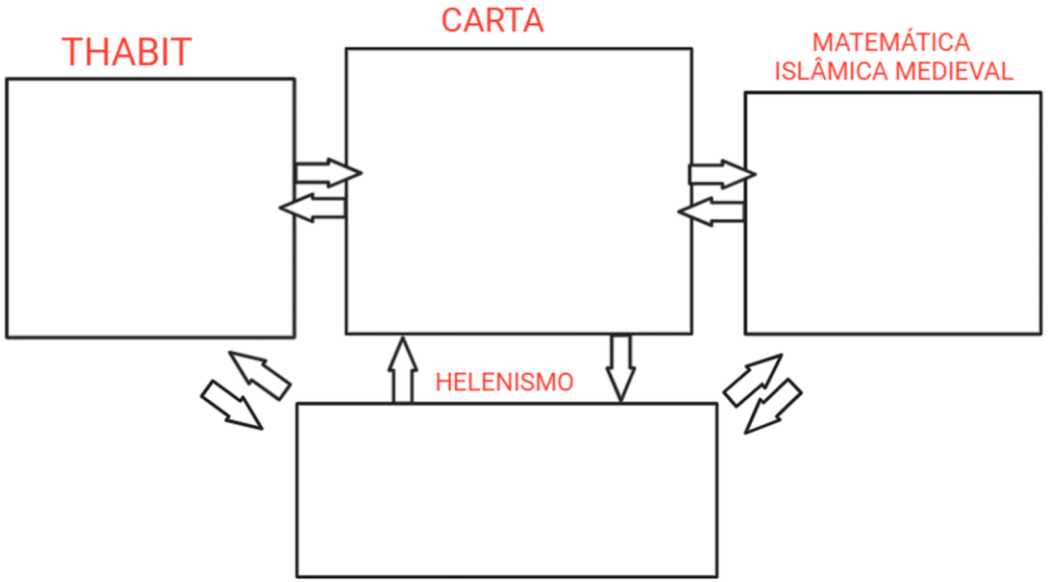
Identifique, sublinhando ou destacando partes do documento (texto e/ou imagem) que remetem ou poderiam justificar estar relacionado com o Teorema de Pitágoras.

IMERGINDO NO DOCUMENTO

Segundo Sayili (1960), um amigo (destinatário) de Thabit estava insatisfeito com a prova socrática do Teorema de Pitágoras. Para tentar atacar o problema, Thabit ibn Qurra apresenta, na carta, duas provas geométricas para o Teorema de Pitágoras aplicado a triângulos retângulos, bem como, expõe, de forma retórica (que trataremos na atividade seguinte), a **Generalização do Teorema de Pitágoras**, aplicada a quaisquer triângulos, sejam retângulos ou não. De fato, a respeito ainda da produção de Thabit atreladada a seu contexto, Rezvani (2013, p. 1, tradução nossa) reforça que "sua língua nativa era o siríaco, também sabia grego e árabe e compôs 150 livros de lógica, matemática, astronomia e medicina em árabe e mais 15 livros em siríaco.". Thabit não somente traduziu produções gregas para o árabe, mas também complementou muitas outras, trazendo inclusive contribuições inéditas a esse trabalhos. De fato, no caso do documento em estudo, Thabit além de mostrar o teorema a triângulos retângulos, foi além e buscou generalizar, permitindo ver a validade do tratado para outros casos de triângulos. **Aguarde!** Já estamos terminando essa atividade. Na atividade seguinte verificaremos como se deu essa generalização proposta por Thabit.

AVALIANDO, SOCIALIZANDO E ENCAMINHAMENTOS FUTUROS

1. Escreva tópicos (uma ou duas palavras para compor o tópico) com os principais pontos no que se referem à relação da carta estudada, Thabit ibn Qurra, a História da Matemática Islâmica Medieval e presença do Helenismo na produção científica islâmica da Idade Média. Para isso, utilizaremos o *Google Jamboard*, que funciona como um quadro branco interativo. Nele faremos de forma colaborativa, ou seja, escreva em cada espaço destinado os tópicos com os principais pontos que identificou no estudo até o momento. Como visto adiante:



O *link* do *Jamboard* será compartilhado via *chat*. Após o acesso, é só escrever os tópicos nos lugares destinados. Socializaremos esses tópicos de maneira a conectá-los, a partir do documento, considerando os contextos que foram surgindo.

Compreendemos, investigamos e exploramos um pouco do contexto que emergiu da carta de Thabit a um amigo, bem como traços biográficos de Thabit, com destaque para uma apreciação preliminar da produção presente na carta: **Generalização do Teorema de Pitágoras**. Vamos conhecer os desdobramentos matemáticos desse documento? Sigamos nossa investigação.

ATIVIDADE 2 – INVESTIGANDO A GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS[6] DESENVOLVIDA POR THABIT, A PARTIR DA CARTA A UM AMIGO

INFORMAÇÕES GERAIS

Pré-requisitos:
– Generalizações algébricas, triângulo e suas propriedades; classificação dos triângulos quanto à medida dos lados e à amplitude dos ângulos.
Recursos necessários: computador ou celular com acesso à internet; *software* GeoGebra instalado; microfone e câmera.
Formato da aplicação: Remoto
Aplicada individualmente ou em grupos.
Objetivos:
– Investigar as situações e casos presentes no tratado de Thabit sobre a Generalização do Teorema de Pitágoras.
– Identificar elementos matemáticos a partir do que foi enunciado de forma retórica.
Assuntos/temas/conteúdos: Teorema de Pitágoras, demonstrações matemáticas, generalização algébrica, Generalização do Teorema de Pitágoras, uso do *software* GeoGebra, Investigação Matemática, História da Matemática Islâmica Medieval

[6] Sobre o termo aqui usado: Teorema de Pitágoras, Roque (2012, p. 113) discute que "não deve ter havido um teorema geométrico sobre o triângulo retângulo demonstrado pelos pitagóricos, e sim um estudo das chamadas triplas pitagóricas. O problema das triplas pitagóricas é fornecer triplas constando de dois números quadrados e um terceiro número quadrado que seja a soma dos dois primeiros. [...] Ou seja, a fórmula de Pitágoras pertenceria ao contexto dos números figurados. Na tradição, poucas triplas são mencionadas e (3, 4, 5) tem um papel especial, pois 3 é o macho; 4, a fêmea; e 5, o casamento que os une no triângulo pitagórico". O resultado de Thabit no estudo presente nessa pesquisa dissertativa se refere a investigação desses termos (conjunto de três números) sendo trabalhado por ele no Tratado da Prova atribuída a Sócrates sobre o Quadrado e suas Diagonais, em que apresenta duas provas e uma Generalização do que hoje nomeamos como Teorema de Pitágoras e assim, optamos por referenciá-lo dessa forma nessa dissertação. Lembrando que o caso particular vale para triângulos retângulos isósceles e a generalização diz que a relação entre os ternos vale também para outros tipos de triângulos.

INTRODUZINDO A TAREFA

Conhecemos traços biográficos de Thabit ibn Qurra, a carta que ele escreveu a um amigo, na qual apresentou sua produção sobre o Teorema de Pitágoras, inclusive a generalização, discutimos anteriormente também a influência da cultura helenística nos trabalhos de Thabit e nas produções científicas islâmicas medievais. Vamos explorar agora mais especificamente a **Generalização do Teorema de Pitágoras**, a partir do documento que iniciamos a análise (a carta), com os desdobramentos epistemológicos e contextuais.

Escreva nos comentários do *chat*, que estamos usando para o curso, a primeira coisa que vem a sua mente sobre as seguintes palavras (observe e obedeça a ordem. Ok?)

1. Teorema de Pitágoras
2. Triângulos retângulos isósceles
3. Triângulos quaisquer
4. Generalização do Teorema de Pitágoras
5. Desenho geométrico
6. GeoGebra
7. Construção geométrica

Convido você a investigar a Matemática desenvolvida por Thabit a partir do tratado sobre a **Generalização do Teorema de Pitágoras**, com auxílio do GeoGebra.

CONHECENDO A MATEMÁTICA DO DOCUMENTO

A **Generalização do Teorema de Pitágoras** foi solicitada por um amigo de Thabit a ele, visto que este estava insatisfeito com a Prova Socrática do referido teorema, pois era aplicada em caso especial: o de um triângulo retângulo isósceles, e este amigo gostaria de uma prova mais geral (validade para outros tipos de triângulos). Segundo Sayili (1960), esta produção configura-se como uma das contribuições mais importantes de Thabit. A **Generalização do Teorema de Pitágoras** é enunciada de forma retórica e surge do pedido desse amigo, embora Thabit já tivesse apresentado duas provas para o caso de triângulos retângulos, isósceles ou não. Na generalização, Thabit expande ainda mais a aplicação do Teorema de Pitágoras, a quaisquer triângulos. Compreende-se ainda que "sua origem [das provas] às vezes é atribuída a matemáticos indianos do final do

século IX. Essas provas podem, portanto, ter sido encontradas independentemente por outros matemáticos também." (SAYILI, 1960, p. 36, tradução nossa), muito embora sejam provas a nós familiares e aqui destacadas como sendo de Thabit, a origem delas não há como definir.

VAMOS CONSTRUIR CONJECTURAS?

1. O que você entende por enunciar retoricamente?

2. Enuncie de forma retórica o Teorema de Pitágoras, com suas palavras e com o que conhece sobre ele.

3. O amigo de Thabit também ficaria insatisfeito com esse seu enunciado? Justifique.

4. Sabemos que Thabit enunciou retoricamente a Generalização do Teorema de Pitágoras, como você pode garantir a validade dessa generalização?

5. Pesquise e apresente uma demonstração matemática para o Teorema de Pitágoras que foi enunciado no item 1.

VOLTANDO À MATEMÁTICA DO DOCUMENTO

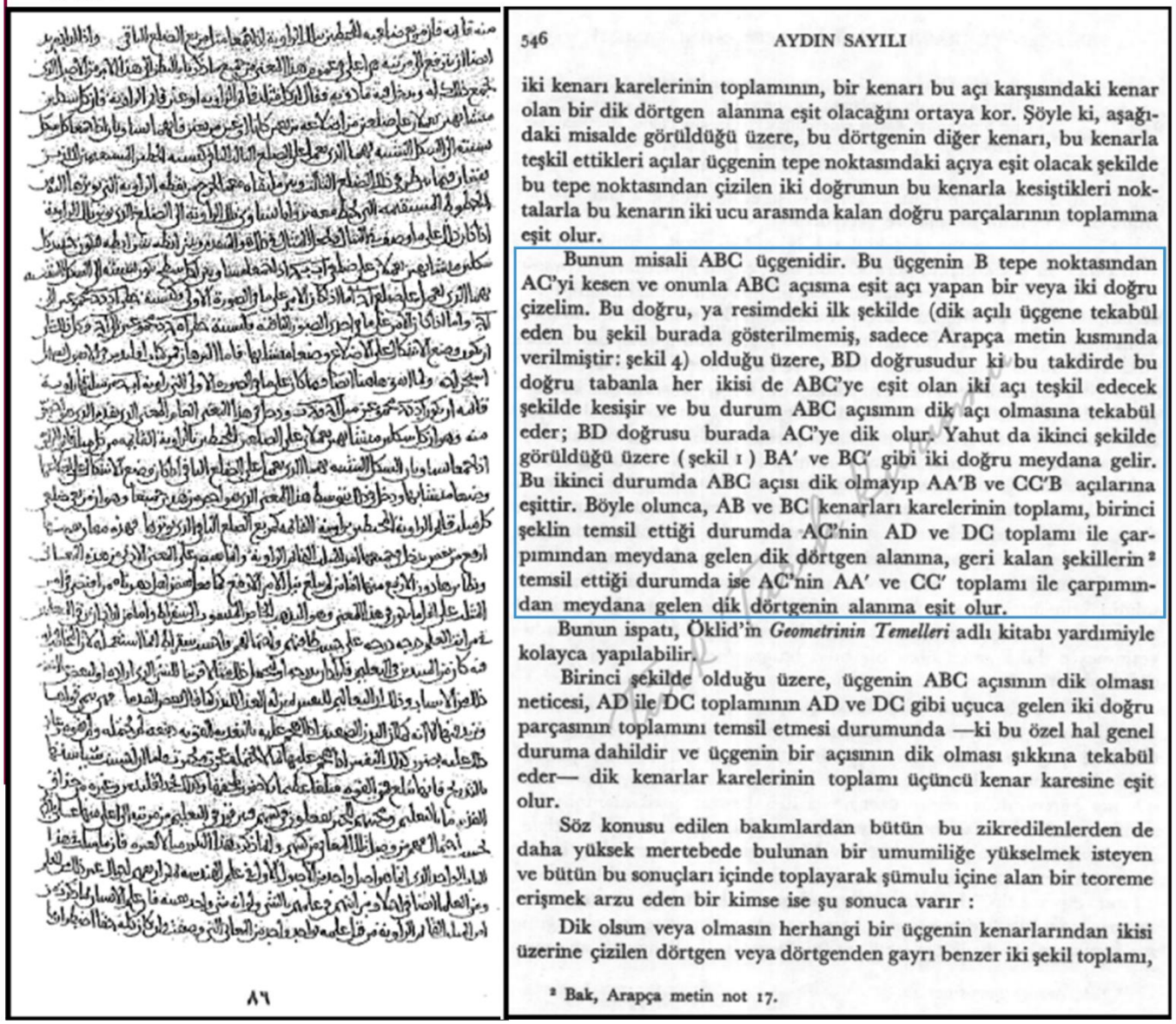
No documento, Thabit então enuncia a **Generalização do Teorema de Pitágoras** da seguinte maneira:

> Este é o triângulo ABC. Vamos desenhar uma ou duas linhas que do vértice B interceptam AC deste triângulo e fazer com isso um ângulo igual ao ângulo ABC. Esta linha é uma linha qualquer BD, como na primeira imagem da figura[...], situação em que esta linha se cruza com a base para formar dois ângulos iguais a ABC e isso corresponde ao ângulo ABC ser um ângulo reto; A linha BD é perpendicular a AC aqui. Ou, como visto na segunda imagem [...], ocorrem duas linhas como BA' e BC'. Nesta segunda situação, o ângulo ABC não é perpendicular e é igual aos ângulos AA'B e CC'B. Assim, a soma dos quadrados dos lados AB e BC é a área retangular de AC multiplicada pela soma de AD e DC, na situação da primeira imagem, e soma de AA' e CC' na situação das imagens restantes. (THABIT, 1958, p.546, tradução nossa)

Observe a **Figura 01** em que está destacada de azul, no texto turco, a evidência de tal resultado no documento, assim como a possível página respectiva do manuscrito árabe do Códex AyaSofya 4832.

Ao enunciar a generalização, percebemos que Thabit, no texto, aborda duas situações distintas e observáveis na generalização, tendo cada situação, uma característica distinta com relações matemáticas também peculiares.

Figura 01 – Página 546 da tradução turca e a sua possível respectiva página em árabe



546 AYDIN SAYILI

iki kenarı karelerinin toplamının, bir kenarı bu açı karşısındaki kenar olan bir dik dörtgen alanına eşit olacağını ortaya kor. Şöyle ki, aşağıdaki misalde görüldüğü üzere, bu dörtgenin diğer kenarı, bu kenarla teşkil ettikleri açılar üçgenin tepe noktasındaki açıya eşit olacak şekilde bu tepe noktasından çizilen iki doğrunun bu kenarla kesiştikleri noktalarla bu kenarın iki ucu arasında kalan doğru parçalarının toplamına eşit olur.

Bunun misali ABC üçgenidir. Bu üçgenin B tepe noktasından AC'yi kesen ve onunla ABC açısına eşit açı yapan bir veya iki doğru çizelim. Bu doğru, ya resimdeki ilk şekilde (dik açılı üçgene tekabül eden bu şekil burada gösterilmemiş, sadece Arapça metin kısmında verilmiştir: şekil 4) olduğu üzere, BD doğrusudur ki bu takdirde bu doğru tabanla her ikisi de ABC'ye eşit olan iki açı teşkil edecek şekilde kesişir ve bu durum ABC açısının dik açı olmasına tekabül eder; BD doğrusu burada AC'ye dik olur. Yahut da ikinci şekilde görüldüğü üzere (şekil 1) BA' ve BC' gibi iki doğru meydana gelir. Bu ikinci durumda ABC açısı dik olmayıp AA'B ve CC'B açılarına eşittir. Böyle olunca, AB ve BC kenarları karelerinin toplamı, birinci şeklin temsil ettiği durumda AC'nin AD ve DC toplamı ile çarpımından meydana gelen dik dörtgen alanına, geri kalan şekillerin[2] temsil ettiği durumda ise AC'nin AA' ve CC' toplamı ile çarpımından meydana gelen dik dörtgenin alanına eşit olur.

Bunun ispatı, Öklid'in *Geometrinin Temelleri* adlı kitabı yardımiyle kolayca yapılabilir.

Birinci şekilde olduğu üzere, üçgenin ABC açısının dik olması neticesi, AD ile DC toplamının AD ve DC gibi uçuca gelen iki doğru parçasının toplamını temsil etmesi durumunda —ki bu özel hal genel duruma dahildir ve üçgenin bir açısının dik olması şıkkına tekabül eder— dik kenarlar karelerinin toplamı üçüncü kenar karesine eşit olur.

Söz konusu edilen bakımlardan bütün bu zikredilenlerden de daha yüksek mertebede bulunan bir umumiliğe yükselmek isteyen ve bütün bu sonuçları içinde toplayarak şümulu içine alan bir teoreme erişmek arzu eden bir kimse ise şu sonuca varır :

Dik olsun veya olmasın herhangi bir üçgenin kenarlarından ikisi üzerine çizilen dörtgen veya dörtgenden gayrı benzer iki şekil toplamı,

[2] Bak, Arapça metin not 17.

Fonte: Sayili (1958) e Sezgin (2010)

EXPLORANDO A MATEMÁTICA PRESENTE NO DOCUMENTO

1. Enuncie de forma retórica a Generalização do Teorema de Pitágoras desenvolvida por Thabit, com suas palavras e com o que compreendeu sobre ela.

2. O texto menciona que Thabit aborda situações distintas no que se refere à generalização, você consegue observar essas situações distintas no enunciado de Thabit? Como as descreveria?

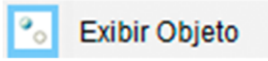
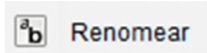
3. Nós categorizamos essas situações da seguinte maneira: **i) Situação 1- Primeira imagem da figura**; e **ii) Situação 2 – Imagens restantes da figura**. Recorra ao trecho em que Thabit enuncia a Generalização de forma retórica, o que devemos entender por essas categorias?

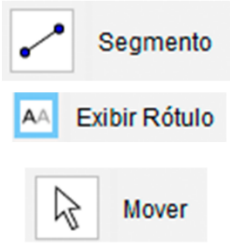
4. A partir do enunciado de Thabit, qual decorrência matemática pode-se ter dessa **Situação 1**?

5. A partir do enunciado de Thabit, qual decorrência matemática pode-se ter dessa **Situação 2**?

6. Para você, a quais imagens Thabit está se referindo ao enunciar a generalização?

7. Construa o que é garantido no enunciado descrito por Thabit com o auxílio do GeoGebra, para esse protocolo de construção usamos o *GeoGebra Clássico 5*, porém pode ser aplicado também na versão *GeoGebra Clássico 6*. Para tanto, basta seguir o passo a passo apresentado adiante, baseado na enunciação retórica, fazendo as devidas investigações:

PASSOS PROPOSTOS POR THABIT (1958) ENUNCIADOS DE FORMA RETÓRICA	PASSO A PASSO NO GEOGEBRA	IMAGENS DE REFERÊNCIA DOS ÍCONES NO GEOGEBRA
X	Ao abrir o *software* GeoGebra, clique com o botão direito do *mouse* sobre a **Janela de Visualização** e clique nas opções **Malha** para desabilitar.	
"Este é o triângulo ABC." (p. 546)	· Na aba **Reta**, selecione o ícone **Reta**. No **Eixo** horizontal (na **Janela de Visualização**), marque dois pontos distintos. Após isso, desabilite a opção **Eixos**, similarmente como fez anteriormente com a opção **Malha.** · Clique com o botão direito nos pontos marcados e desmarque clicando na opção **Exibir Objeto**. · Na aba **Ponto**, selecione a opção **Ponto**. Agora marque um ponto em qualquer lugar diferente e acima da reta traçada. Renomeie este ponto para **B**, clicando com o botão direito na opção **Renomear**. · Ainda com a opção **Ponto**, marque dois pontos na reta traçada e tomando como referência o **ponto B**: um ponto à direita do ponto B e um à esquerda do ponto B. Renomeie estes pontos respectivamente para ponto **C** e **A.**	 

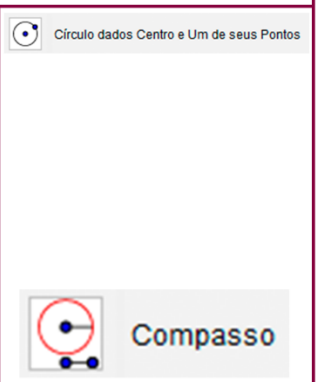
PASSOS PROPOSTOS POR THABIT (1958) ENUNCIADOS DE FORMA RETÓRICA	PASSO A PASSO NO GEOGEBRA	IMAGENS DE REFERÊNCIA DOS ÍCONES NO GEOGEBRA
"Este é o triângulo ABC." (p. 546)	· Na aba **Reta**, selecione a opção **Segmento** , em seguida clique no ponto C, depois no ponto B, marcando o segmento entre C e B. Ainda com a opção **Segmento**, clique no ponto B e depois no ponto A, e, finalmente, clique no ponto A e depois no ponto C, marcando os segmentos entre esses pontos. Em seguida, para cada segmento formado, clique com o botão direito e desabilite o nome do segmento na opção **Exibir Rótulo** . · Clique na aba **Mover** , e na opção **Mover**, movimente os vértices, de modo que o segmento AC sempre seja maior que os outros segmentos.	

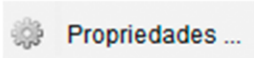
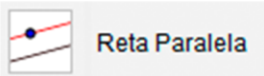
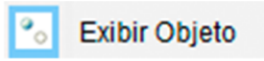
ALGUNS QUESTIONAMENTOS:

· Para este passo, fazer a imagem, tal como Thabit, corresponde a fazer a construção no GeoGebra?

· Há outro comando, que não foi usado aqui, por exemplo no GeoGebra, que garanta esse passo enunciado por Thabit?

· Movendo o vértice B, quais possibilidades de classificação deste triângulo ABC?

"Vamos desenhar uma ou duas linhas que do vértice B interceptam AC deste triângulo e fazer com isso um ângulo igual ao ângulo ABC. [...], ocorrem duas linhas como BA' e BC'. Nesta segunda situação, o ângulo ABC não é perpendicular e é igual aos ângulos AA'B e CC'B." (p. 546)	· Na aba **Círculo dados Centro e Um de seus pontos** , selecione a opção **Círculo dados Centro e Um de seus pontos**, após isso, clique no ponto C e depois no ponto B, construindo a primeira circunferência. Caso a circunferência tenha ficado muito grande, você pode movimentar e diminuir a distância entre os pontos A, B e C. · Selecione a opção **Ponto**, marcando um ponto no encontro da primeira circunferência e a reta inicialmente traçada, à direita do ponto **C**. Renomeie este ponto para **E**. · Na aba **Círculo dados Centro e Um de seus pontos**, selecione a opção **Compasso** , clique no segmento BA e em seguida no ponto E, formando a segunda circunferência. Agora clique com o botão direito na primeira circunferência e desabilite-a, selecionando a opção **Exibir Objeto**. Em seguida, com a opção **Compasso,** clique no segmento AC e em seguida no ponto C. · Na opção **Ponto**, marque o ponto de intersecção, entre as duas circunferências, que está mais próximo ao ponto B, ou seja, acima da reta traçada no início. Renomeie esse ponto para **F**. Após isso, clique na opção **Segmento**, em seguida clique no ponto E, e depois no ponto F. Agora, clique com o botão direito em cima do segmento EF e desabilite o nome do segmento na opção **Exibir Rótulo** . · Clique na aba **Mover**, e na opção **Mover**, então com o botão direito do mouse clique em cada circunferência e em seguida na opção **Exibir Objeto**, cessando a exibição delas.	

PASSOS PROPOSTOS POR THABIT (1958) ENUNCIADOS DE FORMA RETÓRICA	PASSO A PASSO NO GEOGEBRA	IMAGENS DE REFERÊNCIA DOS ÍCONES NO GEOGEBRA
"Vamos desenhar uma ou duas linhas que do vértice B interceptam AC deste triângulo e fazer com isso um ângulo igual ao ângulo ABC. [...], ocorrem duas linhas como BA' e BC'. Nesta segunda situação, o ângulo ABC não é perpendicular e é igual aos ângulos AA'B e CC'B." (p. 546)	· Na aba **Ângulo** , selecione a opção **Ângulo** depois clique nos pontos A, B e C, respectivamente. Em seguida, ainda com a opção **Ângulos**, selecione os pontos F, E e C, respectivamente. Após isso, para uma melhor visualização, com a opção **Mover** ativada, selecione os ângulos marcados (um de cada vez), clicando com o botão direito, indo em **Propriedades** , selecionando a opção **Básico**, na parte **Exibir Rótulo**, selecione **Valor**. Sendo assim, ficará exibindo apenas o valor do ângulo. Ainda com a opção **Mover**, segure e arraste os rótulos de cada ângulo para retirá-los dos rótulos dos pontos e permitir melhor visualização dos seus valores. · Na aba **Reta Perpendicular**, selecione a opção **Reta Paralela**, selecione o segmento EF, em seguida clique no ponto B, traçando uma reta paralela a EF, que passa pelo ponto B. Em seguida, na opção **Ponto**, marque o ponto de encontro da reta paralela agora traçada com o segmento AC, renomeie para ponto A'. · Com opção **Círculo dados Centro e Um de seus pontos** selecionada, clique no ponto B e, em seguida, no ponto A', formando uma circunferência. Agora, com a opção **Ponto**, marque um ponto de encontro entre essa circunferência e o segmento AC, renomeie este ponto para C'. Para melhor visualização dos pontos de interseção entre a circunferência e o segmento AC, com a opção **Mover**, mova os pontos A, B e/ou C. · Com a opção **Mover**, clique com o botão direito na circunferência e desabilite-a na opção **Exibir Objeto**. Faça o mesmo para o segmento EF, o ângulo marcado para os pontos FEC e os pontos E e F, além de desabilitar a reta paralela ao segmento EF que passa pelo ponto B também. · Com a opção **Segmento** selecionada, clique no ponto B e no ponto A'. Em seguida, clique no ponto B e depois no ponto C', traçando seus respetivos segmentos BA' e BC'. Clique com o botão direito nestes segmentos e selecione a opção **Exibir Rótulo**, para desabilitar o nome do segmento. · Ative a opção **Ângulo,** em seguida clique nos pontos, obedecendo a sequência: B, A' e C'. Ainda com esta opção ativada, selecione os pontos: A', C' e B. Após isso, para uma melhor visualização, com a opção **Mover** ativada, selecione os ângulos marcados, clicando com o botão direito, indo em **Propriedades**, selecionando a opção **Básico**, na parte **Exibir Rótulo**, selecione **Valor**. Sendo assim, ficará exibindo apenas o valor do ângulo. · Por fim, clique com o botão direito sobre a reta que passa pelo segmento AC e desabilite-a na opção **Exibir Objeto**.	   

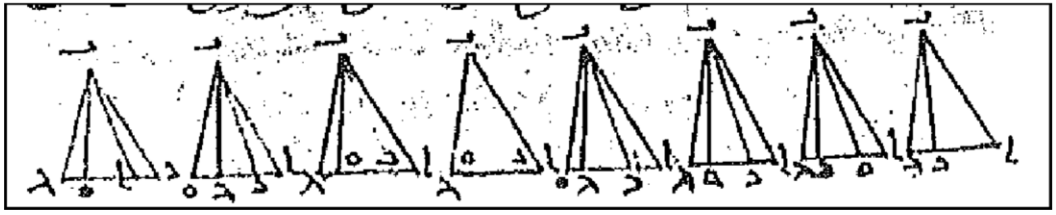
ALGUNS QUESTIONAMENTOS:

- Para este passo, fazer a imagem, tal como Thabit, corresponde a fazer a construção no GeoGebra?
- Há outro comando, que não foi usado aqui, por exemplo no GeoGebra, que garanta esse passo enunciado por Thabit?
- Movendo o vértice B, quais possibilidades de classificação deste triângulo ABC?
- Você consegue, explorando esta construção feita, visualizar as imagens a que Thabit se refere no enunciado da Generalização? Justifique sua resposta.
- Considerando a decorrência matemática para Situação 1: $(\overline{BA})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AD} + \overline{DC}) \times (\overline{AC})$. Para triângulos isósceles retângulos em que a Prova Socrática era válida, a generalização também se confirma? Mova o vértice B, de modo a encontrar $\hat{B} = 90°$ e investigue essa validação.
- Considerando a decorrência matemática para Situação 2: $(\overline{BA})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AA'} + \overline{CC'}) \times \overline{AC}$. A partir dos passos apresentados foi possível verificar a validade da Generalização do Teorema de Pitágoras feita por Thabit ibn Qurra para quaisquer triângulos? Mova o vértice B, de modo a encontrar $\hat{B} \neq 90°$, investigue essa validação e justifique a sua resposta.

INVESTIGANDO UM POUCO MAIS: DE VOLTA À MATEMÁTICA PRESENTE NO DOCUMENTO

Sayili (1958) menciona que, no manuscrito presente no Codex AyaSofya há oito imagens que Thabit utilizou para estudar **Generalização**, como visto na Figura 02 a seguir:

Figura 02 – Recorte das 8 imagens presentes no tratado em que Thabit aborda a Generalização do Teorema de Pitágoras



Fonte: Sezgin (2010)

Importante destacar que, quando Thabit se refere às imagens da figura (primeira imagem e imagens restantes), é preciso visualizar com os oito triângulos presentes, considerando a ordem de visualização sendo da direita para a esquerda[7]. De acordo com Sayili (1960), Thabit fez referência a alguns casos especiais da **Generalização do Teorema de Pitágoras**, inclusive com a imagem de oito triângulos (Figura 02). Importante destacar que estes casos especiais notados por Thabit, e com evidências pelas imagens apresentadas no manuscrito digitalizado, não foram tratados diretamente e nem assim chamados por ele. São os casos especiais:

a) quando B é ângulo reto;
b) quando o ângulo B é menor que 60°;
c) o caso em que o ângulo B é maior que 90°.

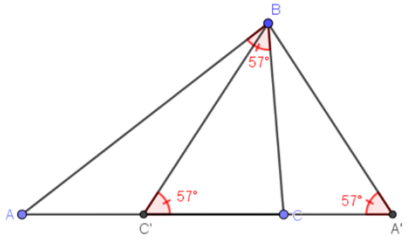
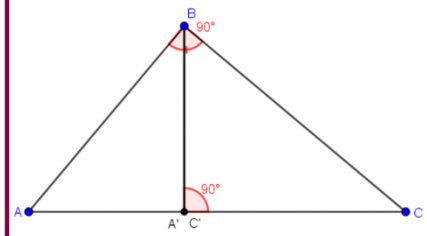
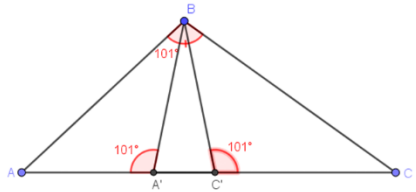
UM POUCO MAIS SOBRE A MATEMÁTICA PRESENTE NO DOCUMENTO

1. Quais conclusões podemos ter em relação a cada caso especial notado por Thabit? O que acontece com a construção feita em cada caso especial? Para isso, na construção feita (item 7) no GeoGebra, na opção **Mover**, movimente o vértice B, de modo a obter esses casos e investigar resposta para as indagações feitas aqui.

2. Thabit relacionou esses casos especiais às imagens presentes na Figura 02. Veja uma possibilidade de representação geométrica presente no quadro, bem como algumas possíveis conclusões sobre estes casos. A partir disso, complete o quadro que segue, indicando

[7] Sentido da escrita árabe.

quais imagens estão relacionadas a seu respectivo caso especial, para isso, na construção feita no GeoGebra (item 7), na opção **Mover**, mova o vértice B de modo a encontrar cada caso especial e verificando as imagens que Thabit fez (Figura 02).

CASOS ESPECIAIS, CLASSIFICADOS POR SAYILI (1960) E PRESENTES NA CARTA			
CASOS	**REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA**	**CONCLUSÃO**	**INDÍCIOS DAS IMAGENS (FIGURA 02)**
$\hat{B} < 60°$		Quando isso ocorre, o vértice A' ou C' fica fora do segmento $(\overline{AC})$	
$\hat{B} = 90°$		Quando isso ocorre, A' e C' coincidem, retornando ao caso particular do Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos	
$\hat{B} > 90°$		Quando isso ocorre, temos que $(\overline{AA'} + \overline{CC'}) < \overline{AC}$	

3. Com a opção **Mover**, ou outra ferramenta do GeoGebra que considere suficiente, você consegue visualizar outros casos além desses? Observe também as imagens da Figura 02 para essa investigação.

4. Podemos ainda investigar uma situação que não está na classificação apontada por Sayili (1960) e indicada no documento de Thabit. Para tanto, tente explorar o que ocorre com a construção, caso $\hat{B} = 60°$? Há indícios na sua construção de alguma imagem, na Figura 02, que represente esse caso? Justifique.

AVALIANDO, SOCIALIZANDO E ENCAMINHAMENTOS FUTUROS

1. Assim como Thabit fez enunciando de forma retórica e no formato de carta ao amigo a **Generalização do Teorema de Pitágoras**, escreva uma carta a alguém de sua escolha (obedecendo a seguinte estrutura: local e data, saudação ou vocativo, o texto, assinatura e despedida[8]), de no máximo uma lauda, em quaisquer *softwares* de Editor de Texto ou outro de sua preferência, apresentando suas conclusões até o momento sobre a Generalização do Teorema de Pitágoras proposta por Thabit no documento estudado. Envie para o professor (por *e-mail*, por exemplo) para que possamos trocar as cartas entre si e visualizar como nossos colegas estão concluindo a Generalização feita por Thabit.

2. Você já ficou insatisfeito, na Matemática, com algum caso particular, semelhantemente ao amigo de Thabit, desejando uma abordagem mais geral? Na próxima atividade, refletiremos, juntamente com Thabit sobre o ato de generalizar.

Convido você a continuar as reflexões e investigações juntamente com Thabit e a carta (documento).

[8]Para mais detalhes sobre a estrutura de uma carta pessoal, acesse: *Carta Pessoal | Educa Mais Brasil.*

ATIVIDADE 3 – REFLETINDO COM THABIT SOBRE GENERALIZAÇÃO A PARTIR DA CARTA A UM AMIGO

INFORMAÇÕES GERAIS

Conhecimentos Prévios:
– Generalizações matemáticas e Generalização do Teorema de Pitágoras
Recursos necessários: computador ou celular com acesso à internet; *software* GeoGebra instalado; microfone e câmera.
Formato da aplicação: Remoto
Aplicada individualmente
Objetivos:
– Refletir sobre generalizações e na matemática.
– Identificar o entendimento de Thabit sobre generalização.
Assuntos/temas/conteúdos: Generalização do Teorema de Pitágoras, Generalização Matemática e Generalizações Algébricas.

INTRODUZINDO A TAREFA

Vimos até o momento trechos do documento (a carta de Thabit ibn Qurra direcionada a um amigo sobre a Generalização do Teorema de Pitágoras), que usamos como fonte de pesquisa, traços biográficos de Thabit, bem como suas produções e a sua relação teológica com a cultura helenística e a produção científica grega. Nessa direção, investigamos com o auxílio do GeoGebra a Generalização do Teorema de Pitágoras desenvolvida por Thabit no século IX, enunciada de forma retórica, mas também com a presença de representações geométricas (imagens), em que se é aplicado o Teorema de Pitágoras a quaisquer triângulos. Essa generalização surge do incômodo que o amigo de Thabit estava com a prova socrática do Teorema de Pitágoras (aplicado a triângulos isósceles retângulos) e com as duas provas de Thabit do Teorema de Pitágoras aplicado a quaisquer triângulos retângulos. Thabit, em seu enunciado, discute duas situações ligadas à generalização: **i) Situação 1 – Primeira imagem da figura** (sobre o caso particular do Teorema de Pitágoras, em um triângulo ABC qualquer, quando o segmento $\overline{BD}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AC}$); e **ii) Situação 2 – Imagens restantes da figura** (em um triângulo ABC qualquer, quando se traçar duas linhas BA' e BC', de modo que os ângulos formados entre os segmentos BA' e BC' com o segmento AC são congruentes ao ângulo $\hat{B}$, do triângulo ABC, com ângulos diferentes de 90 graus.). Thabit apresenta em seu tratado 8 imagens de triângulos aos quais faz referência quando traz a **Situação 1** e a **Situação 2**. A partir do estudamos até aqui, vamos refletir juntamente com Thabit sobre generalizar, partindo da carta que direcionou a seu amigo.

Escreva nos comentários do chat, que estamos usando para o curso, a primeira coisa que vem a sua mente sobre as seguintes palavras (observe e obedeça a ordem. Ok?)

1. Particular
2. Geral

Convido você a refletir sobre o que seria generalizar, a partir do documento (a carta). Essas reflexões são norteadoras de uma compreensão da matemática produzida por Thabit, nessa carta.

CONHECENDO AS REFLEXÕES DE THABIT POR MEIO DO DOCUMENTO

Na carta a seu amigo, após mencionar a Generalização do Teorema de Pitágoras, Thabit faz algumas discussões sobre a relação do geral e do particular. Nessa direção, ele aborda ainda que, muito possivelmente, Sócrates (469 a. C. – 399 a. C.) trouxe um caso particular (o Teorema de Pitágoras aplicado a triângulos retângulos isósceles, partindo do quadrado e suas diagonais) justamente pelo fato de a quem Sócrates ensinava, segundo o relato de Platão, ser alguém iniciante no assunto, não um aluno avançado. Thabit (1958, p. 548, tradução nossa) diz que "Sócrates queria treiná-lo gradualmente, ou queria dar essa prova como um exemplo próximo para outra coisa, ou iluminar uma situação semelhante em termos de razões.".

CONSTRUINDO CONJECTURAS

1. O que significa generalizar?

2. O que significa generalizar na matemática?

3. Para você, quais motivos levaram Thabit a generalizar? Somente por que seu amigo solicitou? Justifique.

4. Você conhece alguma generalização na matemática? Qual?

5. Sabemos que Thabit teve influência da cultura helenística (produções gregas), e os gregos generalizavam?

VOLTANDO ÀS REFLEXÕES DE THABIT PRESENTES NO DOCUMENTO

Thabit ainda afirma que (trecho destacado na Figura 01 de cor azul):

> No ensino, a relação das disciplinas preparatórias com a alma é semelhante à relação da comida com o corpo, como alguns pensadores antigos disseram.
> Na verdade, o conhecimento aumenta o poder da alma e o reforça. No entanto, assim como um alimento forte é dado a um corpo fraco de uma vez, o corpo não pode lidar com ele e este alimento causa um efeito prejudicial nele ao invés de fortalecê-lo, da mesma forma, ele permanece em um estado de poder e desamparo quando algo é previsto que ele não pode suportar. Mas se esse trabalho for feito de forma gradual e precisa, então sua força é tremendamente aumentada sem nenhum dano a ele. (THABIT, 1958, p. 548, tradução nossa)

Na Figura 01, da sequência, apresentamos os trechos referentes à página 548 da tradução turca de Sayili (1958), assim como indícios da página correspondente do documento em árabe.

Thabit (1958) finaliza suas reflexões no tratado observando que o conhecimento ganha sua devida notoriedade quando são combinados: o conhecimento particular de um determinado assunto, com o aspecto mais geral desse mesmo assunto.

Figura 01 – Página 548 da tradução turca e a sua possível respectiva página em árabe

548 AYDIN SAYILI

ler ve asgari derecede umumi olan ve en az şümulu ihtiva eden şıkla, yani Sokrates teoremi ile yetinirler.

Tahminime göre, Sokrates'in bunu kullanmış olmasının sebebi de ancak bu hususta muhatabının bir mübtedi olmasından ileri geliyordu. Sokrates onu tedricî olarak yetiştirmek istiyor, veya bu ispatı başka bir şey için yakın misal olarak vermek, yahut da sebepleri bakımından benzer bir durumu aydınlatmak arzu ediyordu. Çünkü öğretimde hazırlayıcı disiplinlerin nefisle münasebeti, bazı eski düşünürlerin söylediği gibi, gıdanın bedenle münasebetine benzer.

Gerçekten, bilgi nefsin gücünü arttırır ve onu takviye eder. Ancak, nasıl ki zaif bir vücuda kuvvetli bir gıda bir defada verilecek olursa, vücut bunu kaldıramaz ve bu gıda onu kuvvetlendireceğine ona zararlı bir tesir yaparsa, aynı suretle, nefse de kaldıramayacağı bir şey tahmil edilince güç ve âciz bir durumda kalır. Fakat bu iş tedricî bir şekilde ve isabetli bir tarzda tertiplenirse, o zaman, ona hiç bir zarar gelmeksizin onun kuvveti muazzam derecede arttırılır.

Eskilerden öğretimde büyük meharet sahibi ve faydalı olmak için gayretli kimselerden Öklid ve diğerlerinin kitaplarında bu suretle hareket ettiklerini ve bu bilgileri onların kitaplarından edinmek isteyenlerin anlayış derecelerine göre tedricî olarak bir kademeden daha yükseğine geçtiklerini görüyoruz. Ben burada bir örnek vermek maksadiyle bu konuya temas ettim. Gerçekten, geometri ilminin köklerinden birini teşkil eden ve üçgenle ilgili olan bu konuda burada sunduğum mukayeseli örnek, ilmî bilgideki, ve aynı zamanda, bir tek konu için de olsa, ilim adamlarının bilgilerinin derecesindeki farklar hususunda, başka misallerde de buna benzer durumları anlamamızı mümkün kılar.

Dik üçgenle ilgili olarak yukarıda zikri geçen teoremlerin hepsi de zaruri olarak doğru olmakla beraber, bunların her birinin teker teker temsil ettiği bilgi aynı değildir; insanların bunlara tekabül eden ilim dereceleri ile mertebeleri ve bu bilgilere sahip olma tarzları arasındaki fark da küçük değil büyüktür.

İnsanın bir şey hakkındaki bilgisi ancak bu iki şıkkın birleşmesi, yani bilginin gerek küllî ve umumi ve gerekse cüzî ve hususî olması halinde tam ve noksansız olur. Çünkü insan bir şeyi sadece özel ve cüzî olarak bilirse ilimde fakir durumda bulunur, bilgisi geniş ve

Fonte: Sayili (1958) e Sezgin (2010)

VAMOS REFLETIR

1. Qual é a relação dos significados encontrados em suas pesquisas quanto ao significado de generalizar, generalizar na matemática e o que Thabit apresentou como sendo generalizar, assim como a relação com a Generalização do Teorema de Pitágoras?

2. Considerando que Thabit relaciona o conhecimento e a alma, assim como o alimento e o corpo, quais conclusões se pode tirar dessa reflexão e sobre generalizar?

3. Pesquise por outras generalizações na matemática (como sugestão, acesse: *Cuidado ao fazer generalizações, principalmente na Matemática!)*, os autores e as respectivas épocas em que foram apresentadas. Quais você já conhecia? Conseguiria mencionar um caso particular dessa generalização que você conhecia?

4. Quando se pesquisa generalização na matemática, normalmente a expressão vem relacionada às generalizações algébricas. Para você, por que relacionamos generalizar ao conhecimento algébrico? Só há essa possiblidade para a generalização? Deve estar relacionada a aspecto da álgebra ligado ao simbolismo e linguagem matemática? Poderia estar ligada a outras possibilidades? Justifique.

REFLETINDO, AVALIANDO E SOCIALIZANDO

1. Tendo em vista o que vimos até este momento nas leituras e atividades, construa um Mapa Mental, apresentando, de forma sintética, o seu entendimento sobre a Generalização do Teorema de Pitágoras, feita por Thabit ibn Qurra, considerando todos os contextos que emergiram do estudo do documento aqui investigado, assim como o seu conhecimento matemático.

- Veja o passo a passo para fazer um Mapa Mental:
Como fazer um MAPA MENTAL Passo a Passo - YouTube

- Use como **Tema Central**: TRECHO DA CARTA DE THABIT IBN QURRA (836 d. C. – 901)

Algumas sugestões de app ou sites para se fazer o mapa mental. Lembrando que pode utilizar outro de seu interesse ou até mesmo folha, canetas de cores variadas e/ou lápis:

- MIND MEISTER: *http://www.mindmeister.com/pt*
- MIND NODE: *http://www.mindnode.com/*
- COGGLE: *http://coggle.it/*
- CMAP TOOLS: *CmapTools | Cmap (ihmc.us)*

Para um exemplo de construção de Mapa Mental, especificamente no site Mind Meister, acesse ao vídeo: MindMeister: veja o passo a passo para se criar mapas mentais - YouTube.

Fizemos uma longa jornada de aprendizado até aqui. Vamos compartilhar com a turma nossas conclusões?
Ao fazer o Mapa Mental, salve em seus arquivos. Agora, convido você a socializar seu mapa mental, através da plataforma **Padlet**. Para isso faça o login em https://pt-br.padlet.com/auth/login, clique na aba **entrar em um padlet**, coloque o link enviado no chat pelo professor (a), para entrar no Padlet intitulado: SOCIALIZAÇÃO DO MAPA MENTAL, clique duas vezes na tela (ou clique no **símbolo de mais** na parte inferior da tela) que está apresentada neste Padlet, em seguida faça o *upload* do seu mapa mental, salvo em seus arquivos: pronto, a partir disso podemos explicar as conclusões usando o mapa como referência.

EXPECTATIVA DE RESPOSTA

ATIVIDADE 1 – CONHECENDO O DOCUMENTO, THABIT E SEU CONTEXTO

CONSTRUINDO CONJECTURAS

1. Resposta pessoal.

2. Espera-se que o aluno identifique Thabit ibn Qurra como remetente e seu amigo como destinatário. Pelas informações até o momento, espera-se que entenda que a relação entre Thabit e seu amigo se dê por questões de produção científica. Pela pesquisa feita, o aluno visualizará que não se tem indícios de quem seja esse amigo, inclusive se existiu mesmo, dificultando o entendimento sobre a relação entre eles.

3. Espera-se que o aluno veja que é uma prova de Sócrates, a princípio matemática, sobre o quadrado e suas diagonais. A partir disso, o aluno poderá perceber que aparece outro personagem, além de Thabit e seu amigo: Sócrates. E este tendo como relação com Thabit e seu amigo o interesse por provas geométricas.

4. Espera-se que o aluno identifique que Thabit e seu amigo estão imersos no Islamismo, que por sua vez, tem como idioma padrão o árabe.

5. Resposta pessoal.

VAMOS REFLETIR

1. Neste momento, o aluno já identificou que Thabit e seu amigo estão supostamente imersos no Islamismo. Espera-se que identifique também essa imersão devido às referências a Allah no que se refere à religião mulçumana. Como a expansão islâmica, neste período de Thabit, não se deu apenas por vieses territoriais, mas também político, científico e religioso, explicando assim a referência a Allah em produções científicas da época, reforçando a presença da religião e aspectos teológicos em todos os campos dessa expansão. Podendo identificar essas relações no trecho:

Figura 02 – Traduções turca e portuguesa da primeira página do trabalho de Thabit a respeito do Tratado da Prova atribuída a Sócrates sobre o Quadrado e suas Diagonais

KARE İLE KÖŞEGENİ HAKKINDAKİ (TEOREMİN) SOKRATES TARAFINDAN VERİLEN İSPATI ÜZERİNE EBÜ'L HASAN SÂBİT İBN KURRA'NIN RİSALESİ

(Türkçe Tercüme)

Allah seni aziz kılsın; kare ve köşegeni ile ilgili Sokrates ispatını ve bu ispatta sarih olarak meydana çıkan hususları, yani üçgenin dik olduğunu ve ikizkenar olması halinde dik açıyı meydana getiren iki kenarının kareleri toplamının diğer kenar karesine eşit olduğunu söz konusu ediyor, bundaki metodu kolayca anlaşılabilmesi bakımından övüyorsun. Gerçekten, bu metodla, buradaki dörtgenlerin eşitliği, bunların birbirlerine eşit kısımlarının bazılarının birbirleriyle intibak ettirilmesi suretiyle meydana çıkıyor. Ancak, Allah seni mesut etsin, özel bir hali temsil edip sadece ikizkenar üçgen için zaruri olarak doğru olması ve bu teoremin şümulu içine girmesi gereken ikizkenardan gayrı dik üçgenleri ihtiva etmemesi bakımından hakikaten beğenilmemesi gereken mahiyetinden dolayı bu ispatı kusurlu bulduğunu, bu ispatın seni tatmin etmediğini söyliyorsun, ve bunun genel ispatını yapmışsam bunu sana bildirmemi istiyorsun.

O TRATADO DE ABU'L HASAN THABIT IBN QURRA EM RELAÇÃO À PROVA ATRIBUÍDA A SÓCRATES SOBRE O QUADRADO E SUA DIAGONAL

(Tradução Turca)

Que Allah o torne santo; A prova de Sócrates sobre o quadrado e a diagonal e os pontos que ocorrem obviamente nesta prova, ou seja, o triângulo é perpendicular e se for um isóscele, a soma dos quadrados dos dois lados que formam o ângulo reto é igual ao quadrado do outro lado, você elogia o método aqui para fácil compreensão. De fato, com este método, a igualdade dos quadriláteros aqui surge combinando algumas de suas partes iguais entre si. No entanto, que Allah lhe agrade, você diz que acha esta prova falha por causa de sua natureza, que não deveria ser admirada, uma vez que representa um estado especial e só é essencialmente verdadeira para um triângulo isósceles e não contém triângulos retângulos além de isósceles que deveriam ser incluídos neste teorema, e esta prova não o satisfaz, e você quer que eu informe se eu fiz uma prova geral disso.

Fonte: Sayili (1958)

2. O Islamismo é uma religião monoteísta (creem em um único Deus: Allah) revelado a Maomé, por meio do Anjo Gabriel. O Islamismo é norteado pelo Alcorão, Livro Sagrado, que não somente dá direcionamentos religiosos, mas também políticos, seus seguidores denominam-se, dentro do aspecto religioso como mulçumanos. Utilizando o árabe como o idioma padrão de todos os que estavam imersos no Islamismo. Contudo, vale ressaltar que nem todo islâmico é árabe. Mais detalhes ver em: Araújo (2019).

3. Espera que o (a) aluno (a) identifique, através de pesquisas, a partir do que foi visto no documento, que no período medieval a matemática islâmica esteve em constante produção, ainda que não tenha chegado muito dessa produção aos estudiosos do Ocidente. Mas neste período, os islâmicos estavam preocupados com o estudo, apropriação e produção do conhecimento, nas mais variadas áreas, inclusive para uso na administração e governo do Império Islâmico crescente deste período.

4. Resposta pessoal.

VAMOS REFLETIR NOVAMENTE

1. Espera-se que o aluno identifique que com a expansão islâmica e o incentivo dos califas nas produções científicas, até mesmo com a criação da Casa da Sabedoria, voltou o olhar para produções gregas, um possível motivo para o desenvolvimento do tratado de Thabit presente na carta.

2. Espera-se que o aluno faça pesquisas e identifique que nem todos os estudiosos da época de Thabit eram mulçumanos, muito embora fizessem parte da Civilização Islâmica, mergulhados nos contextos políticos, religiosos, militares e científicos a que estavam relacionados.

3. Espera-se que o (a) aluno (a) identifique como diferenças que, ao se usar a terminologia árabe, estamos nos referindo ao povo que pertencia à Peninsula Arábica, ou seja, esse termo se refere à etnia árabe. Já a terminologia – mulçumano - está ligada a todos ou quase todos os árabes que seguiam a religião de Maomé. E, Islamismo ou o adjetivo islâmico está diretamente relacionado com a expansão, no sentido militar, religioso e também científico aos olhos do islamismo. Thabit era islâmico, justamente por estar incluído neste contexto político que emerge do Islamismo. Muito embora fizesse parte de outro contexto teológico e com propriedade de outros idiomas, além do árabe.

4. Espera-se que o aluno compreenda que o Helenismo é um termo utilizado para se referir a cultura grega, seja idioma, produção científica, filosófica, dentre outras.

5. Espera-se que o aluno visualize, a partir da investigação iniciada, que como Thabit fazia parte dos Sabians e por conseguinte uma forte relação com a cultura grega, proporcionou-lhe uma maior propriedade quanto ao idioma grego e um fator importante nas suas produções, como traduções de obras gregas, mas também de produções inéditas, como a presente na carta, já que se tem como base a prova socrática.

6. Espera-se que o aluno destaque as imagens presentes na figura, que pode ser um indício da relação com o Teorema de Pitágoras.

AVALIANDO, SOCIALIZANDO E ENCAMINHAMENTOS FUTUROS

1. Resposta pessoal, a partir das conclusões feitas até o momento.

ATIVIDADE 2 – INVESTIGANDO A GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS DESENVOLVIDA POR THABIT, A PARTIR DA CARTA A UM AMIGO

VAMOS CONSTRUIR CONJECTURAS?

1. Resposta pessoal. Mas espera-se que o aluno entenda que enunciar retoricamente é fazer um enunciado com a utilização de um discurso.

2. Resposta pessoal. Mas uma possibilidade seria: em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

3. Resposta pessoal. Entretanto, a partir da possibilidade de resposta anterior, percebe-se que o amigo de Thabit ficaria sim, porque esse enunciado retórico está para um triângulo retângulo, e não para quaisquer triângulos.

4. Espera-se que o aluno perceba que podemos validar a Generalização do Teorema de Pitágoras desenvolvido por Thabit visualizando em construções geométricas, com exemplos numéricos ou até mesmo utilizando-se da notação matemática atual e desenvolvendo uma generalização algébrica para esse enunciado.

5. Ao se pesquisar formas diferentes de demonstração ou enunciado do Teorema de Pitágoras, dentre os resultados que aparecem, temos o site *5 demonstrações do Teorema de Pitágoras – Derivando a matemática (unicamp.br)*, nele o (a) aluno (a) observará 5 possíveis demonstrações/enunciados do Teorema de Pitágoras. A partir disso, o (a) aluno (a) poderá responder à questão. Temos as seguintes demonstrações: por semelhança de triângulos; por relações métricas da circunferência; pelo uso do método de Perigal, pelo uso de um método geométrico e pelo uso de trapézios.

EXPLORANDO A MATEMÁTICA PRESENTE NO DOCUMENTO

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal. Mas o aluno pode identificar duas situações: quando traçamos um segmento de reta BD; e outra situação é quando traçamos dois segmentos de reta: BA' e BC'.

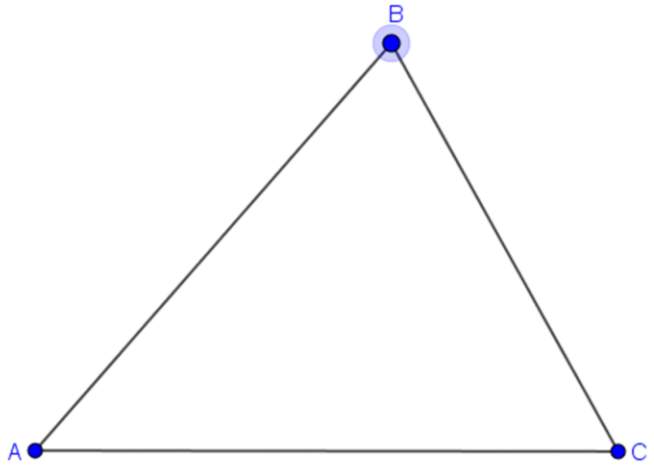
3. Espera-se que o aluno identifique no trecho do documento que na **Situação 1 - Primeira imagem da figura** está se referindo ao caso particular do Teorema de Pitágoras, para triângulos retângulos, já que o ângulo $A\hat{B}C$ é reto, igual a 90°; e **Situação 2 – Imagens restantes da figura**, para o caso mais geral, quando $A\hat{B}C$ é diferente de 90°.

4. Espera-se que o aluno, a partir do enunciado de Thabit presente na carta a um amigo, que na **Situação 1**, o aluno possa apresentar retoricamente assim: traçamos um segmento BD, em um triângulo ABC, sendo BD perpendicular a base, formando dois ângulos retos iguais a $A\hat{B}C$, sendo o quadrado do segmento AB mais o quadrado do segmento BC é igual ao segmento AC multiplicado pela soma dos segmentos AD e DC. Ou assim: $(\overline{BA})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AD} + \overline{DC}) \times (\overline{AC})$.

5. Espera-se que o aluno, a partir do enunciado de Thabit presente na carta a um amigo, que na **Situação 2,** o aluno possa apresentar retoricamente assim: em um triângulo ABC, traçamos dois segmentos de reta BA' e BC', formando-se, com a base, dois ângulos iguais, temos que o quadrado do segmento AB mais o quadrado do segmento BC é igual ao segmento AC multiplicado pela soma dos segmentos AA' e CC'. Ou assim: $(\overline{BA})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AA'} + \overline{CC'}) \times \overline{AC}$.

6. Espera-se que o aluno considere que em algum momento Thabit traz essas imagens a que se refere, muito embora até o momento não apareceram na investigação.

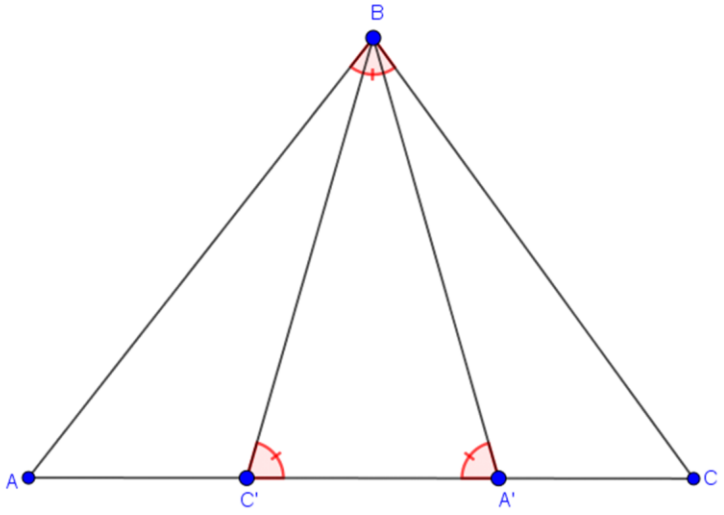
7. Espera-se que o (a) aluno (a) ao seguir o protocolo de construção, finalizando o primeiro passo enunciado por Thabit, chegando a essa construção:



Alguns questionamentos:

· Espera-se que o aluno visualize que a construção se diferencia, neste passo, da imagem feita por Thabit, exatamente pela possibilidade de movimentação de vértices, por exemplo.
· Resposta pessoal. Deixar que os alunos investiguem e identifiquem, se houver, outros comandos que garantam também este passo enunciado por Thabit, além do que foi proposto.
· Espera-se que o aluno mova o vértice B, e identifique triângulos equiláteros, isósceles e escalenos, quanto à medida dos lados destes triângulos.

Espera-se que o (a) aluno (a) continue com o protocolo de construção, finalizando o outro passo enunciado por Thabit, chegando a essa construção:



Alguns questionamentos:

· Espera-se que o aluno visualize que há diferença na classificação dos triângulos, seja quanto à medida dos lados, seja quanto à amplitude dos ângulos. E uma diferença da construção para imagens que representem essa variação de classificação seria a dinamicidade que uma construção nos oferece, já que se fôssemos desenhar, teríamos que representar cada triângulo diferente, quanto a classificação, em um desenho também diferente.

· Resposta pessoal. Deixar que os alunos investiguem e identifiquem, se houver, outros comandos que garantam também este passo enunciado por Thabit, além do que foi proposto.

· É possível, ao mover o vértice B, identificar a situação que se refere às imagens restantes, quando traçamos dois segmentos de reta BA' e BC', formando-se, com a base, dois ângulos iguais a $A\hat{B}C$ e diferentes de 90°.

· Espera-se que o aluno compreenda que a prova socrática é válida nessa **Situação 1**, ou seja, a Generalização do Teorema de Pitágoras, desenvolvido por Thabit se confirma. O aluno neste momento, ao mover o vértice B e encontrar $\hat{B} = 90°$, basta utilizar os valores de cada lado presentes na construção no GeoGebra para validar essa decorrência matemática.

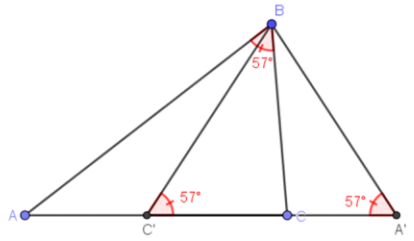
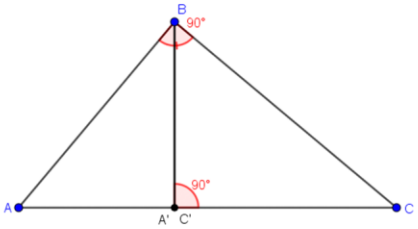
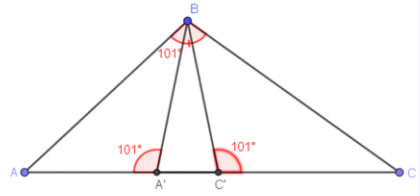
· Espera-se que o aluno nessa **Situação 2**, a Generalização do Teorema de Pitágoras, desenvolvido por Thabit se confirma e é validada para quaisquer triângulos. O aluno neste momento, ao mover o vértice B e encontrar $\hat{B} \neq 90°$, basta utilizar os valores de cada lado presentes na construção no GeoGebra para validar essa decorrência matemática.

UM POUCO MAIS SOBRE A MATEMÁTICA PRESENTE NO DOCUMENTO

1. Neste momento, espera-se que o aluno conclua sobre os casos especiais, considerando a construção. Ao mover o vértice B, o aluno identificará que, quando o ângulo B é reto, os pontos A' e C' coincidem. Quando mover o vértice B, com o segmento AC maior que os outros dois segmentos, de modo a encontrar o ângulo B menor que 60°, o aluno observará que A' ou C' ficará fora do segmento AC. E quando mover o vértice B, de modo a ter o ângulo B maior que 90°, temos que eles se invertem, ou seja, o segmento AA' somado com o segmento CC' é menor que o segmento AC.

2. Espera-se que ao se investigar o aluno complete da seguinte maneira:

CASOS ESPECIAIS, CLASSIFICADOS POR SAYILI (1960) E PRESENTES NA CARTA

CASOS	REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA	CONCLUSÃO	INDÍCIOS DAS IMAGENS (FIGURA 02)
$\hat{B} < 60°$		Quando isso ocorre, o vértice A' ou C' fica fora do segmento $(\overline{AC})$	Quarta e oitava imagens
$\hat{B} = 90°$		Quando isso ocorre, A' e C' coincidem, retornando ao caso particular do Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos	Primeira imagem
$\hat{B} > 90°$		Quando isso ocorre, temos que $(\overline{AA'} + \overline{CC'}) < \overline{AC}$	Segunda ou terceira imagem

3. Resposta pessoal, a partir da exploração da construção no GeoGebra, além das investigações feitas até o momento.

4. Ao mover o vértice B e encontrar o ângulo B igual a 60°, o aluno poderá observar que A' coincide com C; e C' coincide com A, tendo um triângulo equilátero neste caso. Temos como hipótese, uma possibilidade de imagem que pode representar este caso é a quinta imagem da figura, porque é a imagem que aparentemente os vértices coincidem, inclusive sem a presença de outros segmentos de reta, como BA' e/ou BC'.

AVALIANDO, SOCIALIZANDO E ENCAMINHAMENTOS FUTUROS

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

ATIVIDADE 3 – REFLETINDO COM THABIT SOBRE GENERALIZAÇÃO A PARTIR DA CARTA A UM AMIGO

APRESENTANDO CONJECTURAS

1. Espera-se que, por meio de uma pesquisa, o aluno entenda que generalizar é ampliar, estender, universalizar, entre outros resultados.

2. É esperado que o (a) aluno (a) observe que generalizar na matemática pode ser entendido como estender propriedades de um determinado conceito a situações matemáticas, ligadas a esse conceito, de forma geral. Sendo necessária a prova matemática, para que essa generalização seja tomada como verdadeira.

3. Resposta pessoal. Mas espera-se que o aluno visualize que Thabit acredita que se deve combinar o particular com o geral, por isso também procurou desenvolver a Generalização do Teorema de Pitágoras.

4. Resposta pessoal.

5. Espera-se que o aluno visualize que sim, os gregos generalizavam, inclusive porque essa era uma característica marcante da Filosofia grega.

VAMOS REFLETIR

1. Neste ponto, o aluno deve destacar que, para Thabit, generalizar é apresentar um conhecimento que vai além do caso particular, como pode ser observado na Generalização do Teorema de Pitágoras aplicada a quaisquer triângulos, e não somente a triângulos retângulos. No entanto, Thabit também se utilizou de proposições e propriedades verificadas no caso particular (Teorema de Pitágoras aplicado a triângulos retângulos) para configurar a generalização, ressaltando que para o aprendizado é fundamental ampliar o conhecimento sobre determinados conceitos.

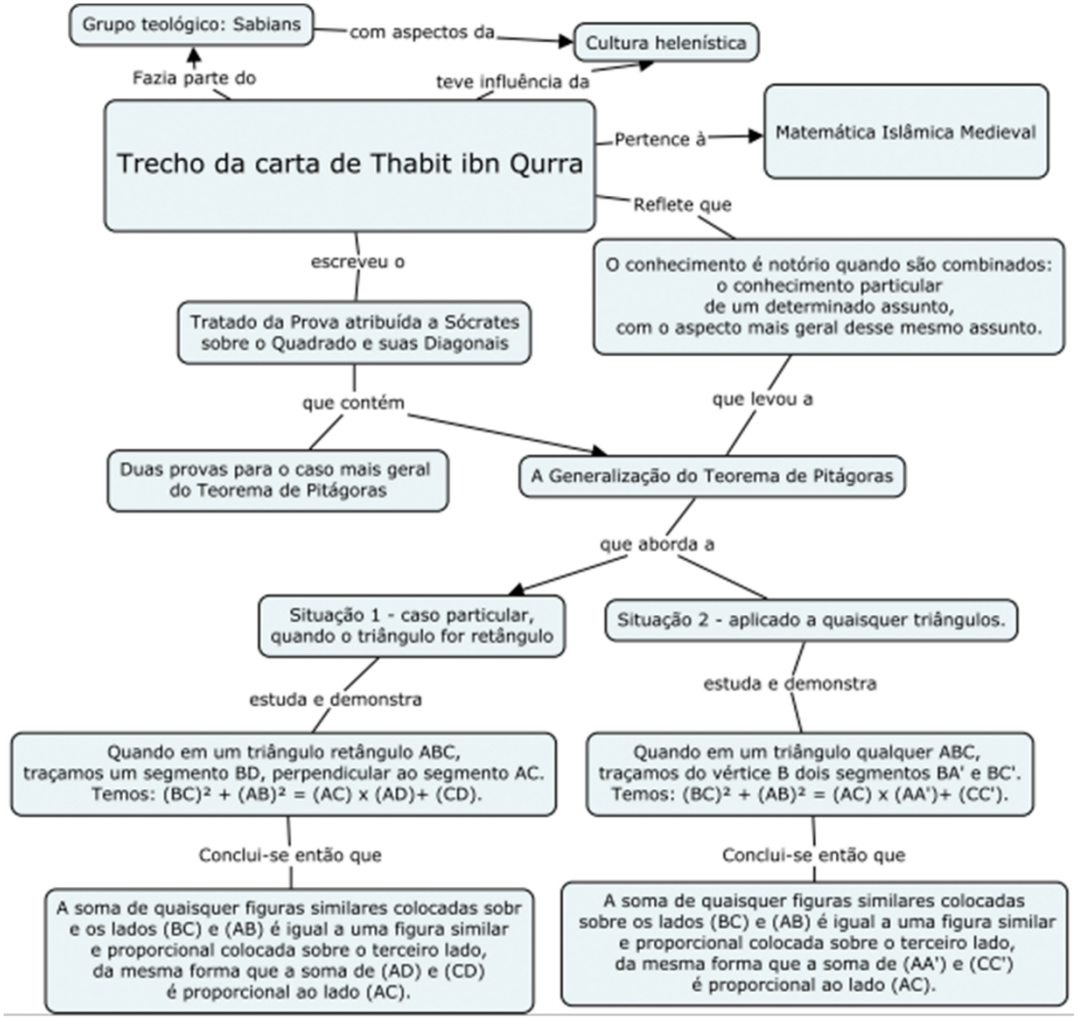
2. Espera-se que o aluno compreenda que assim como não se pode dar muito alimento a um corpo fraco, porque este não absorverá de forma eficaz, é o conhecimento dado à alma. É importante trazer o conhecimento de forma gradual, para que a alma o receba de uma forma não prejudicial, e a partir disso, assim como o alimento ao corpo, podemos trazer mais conhecimento que isso não lhe causará danos de aprendizagem. Normalmente estudamos o Teorema de Pitágoras para o caso particular, sendo importante a Generalização, inclusive ao associar o particular ao mais geral, conforme sugere Thabit em resposta ao seu amigo na carta.

3. Resposta pessoal.

4. É esperado que o (a) aluno (a) identifique que muito do que atualmente fazemos com as generalizações é dentro do campo da Álgebra. Como os (as) alunos (as) tendem a ver casos particulares dentro da matemática, generalizar está muito ligado à Álgebra, exatamente por proporcionar a extensão algébrica de situações que numericamente (casos particulares) podem ser facilmente visualizados, partindo das propriedades usadas nesses casos. Mas as generalizações não estão somente ligadas à Álgebra, muito embora devido a linguagem e simbolismo, verificamos mais fortemente neste campo da Matemática, tanto que Thabit traz um exemplo de Generalização com enunciado retórico e indícios de demonstração geométrica, a partir das imagens.

REFLETINDO, AVALIANDO E SOCIALIZANDO

1. Neste espaço, o (a) aluno (a) socializará todo seu entendimento sobre a Generalização do Teorema de Pitágoras desenvolvida por Thabit, a partir da análise feita ao trecho da carta de Thabit a um amigo, bem como todo contexto que emergiu deste documento, com o auxílio de ferramentas de mapa mental, a seu critério (ver algumas possibilidades na seção dicas ao professor). Podemos ter como uma possibilidade de mapa:



REFERÊNCIAS

BERGGREN, J. L. **Episodes in the Mathematics of Medieval Islam**. New York: Springer, 1986.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 6 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.
MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. História na Educação Matemática: propostas e desafios. – 3 ed.– Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. **Thabit**. (1999). In: MacTutor History of Mathematics *Archive*. Disponível em: http://www.history.mcs.standrews.ac.uk/PictDisplay/Thabit.html . Acesso em: 12 dez. 2018.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. – 4. Ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

REZVANI, Pouyan. Three Treatises by Thābit ibn Qurrah. 2013.

SAITO, F. **Construindo interfaces entre história e ensino da matemática**. Ensino da Matemática em Debate, 3 (1, 2016): 3-19.

SAYILI, Aydin. **Thabit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem**.The University of Chicago Press: The History of Science Society. 1960. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/227603?origin=JSTOR-pdf. Acesso em: 22 jul. 2018.

SAYILI, Aydin. **Sâbit ibn Kurra'nin Pitagor Teoremini Tamimi**. Belleten, 22: 527-549, 1958.

SEZGIN, Fuat (Ed.). **CODEX AYASOFYA 4832: A collection of Mathematical, Philosophical, Meteorological and Astronomical Treatises**. Institute for the History Arabic-Islamic Science. Frankfurt: Alemanha. 2010.

SILVA, Alison Luan Ferreira da. **História da matemática, tecnologias digitais e investigação matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o 8 ano**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

THABIT, ibn Qurra. Trad. Aydin Sayili. In: **Sâbit ibn Kurra'nin Pitagor Teoremini Tamimi**. *Belleten*, 22: 527-549, 1958.